Prof. D. Metzler SS 2023

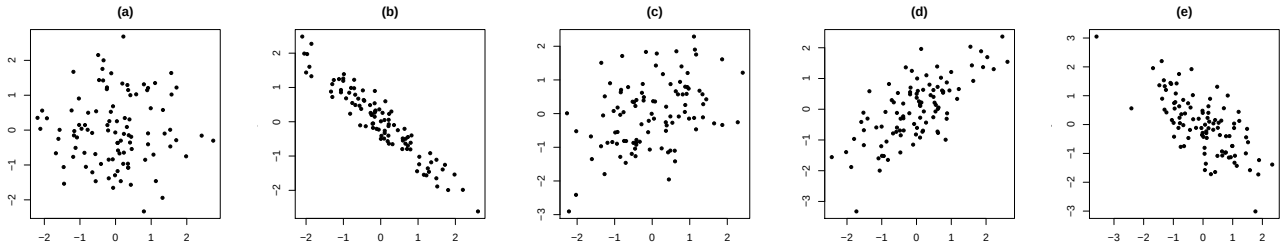
# ÜBUNGEN ZUR WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG UND STATISTIK FÜR BIOLOGEN

Blatt 11

---

**Aufgabe 1**

(a) Die unten stehenden Scatterplots (a)–(e) zeigen Datensätze mit verschiedenen Korrelationskoeffizienten. Ordnen Sie die Bilder und Korrelationkoeffizienten einander zu.




| Korrelationkoffizient | -0.95 | -0.7 | 0 | 0.4 | 0.7 |
|---|---|---|---|---|---|
| Bild | | | | | |

(b) Berechnen Sie für folgenden Mini-Datensatz jeweils Mittelwert und Stichprobenvarianz der $x$- und der $y$-Werte sowie die Kovarianz von $x$ und $y$ und den Korrelationskoeffizienten:

| $x$ | 1 | 3 | 2 |
|---|---|---|---|
| $y$ | 0 | 2 | -2 |

Sowohl Skalierung mit $n-1$ als auch mit $n$ sind möglich; diskutieren Sie, welche Skalierung sinnvoller ist und wovon das abhängt.

(c) Berechnen Sie nur mit Papier, Stift, Taschenrechner und Quantiltafeln für den Mini-Datensatz aus (b) die Regressionsgrade für die Vorhersage von $y$ aus $x$ und prüfen Sie, ob der Zusammenhang zwischen $x$ und $y$ statistisch signifikant ist.

(d) Visualisieren Sie die Daten aus (b) zusammen mit Ihrer Regressionsgeraden aus (c).

**Aufgabe 2** In R können Sie mit `MASS::oats` einen Datensatz einlesen, der Erträge (Y, engl. yield) aus einem Versuch mit verschiedenen Hafersorten (V, engl. variety) mit verschiedenen verschiedenen Anbauflächen (B, Block) und verschiedenen Mengen an Stickstoffdünger (N) zeigt.

(a) Erstellen Sie eine Abbildung, die (ohne Modellanpassung) zeigt, wie der Ertrag von den anderen Faktoren abhängt.

(b) Testen Sie, ob der Effekt unterschiedlicher Mengen des Düngemittels von der Sorte abhängt. Berücksichtigen Sie in Ihrem Modell, dass die Anbauflächen auch einen Effekt auf das Ergebnis haben können.

(c) Welcher Ertrag wäre für die verschiedenen Sorten auf den verschiedenen Blöcken bei einer Düngemittelmenge von 0.3 [cwt/acre] zu erwarten, nach welcher Formel wird diese Vorhersage berechnet und welche Annahme/Vorhersage macht das Modell zur Verteilung der Werte? Passen Sie zur Beantwortung dieser Frage ein Modell an die Daten an, in dem Sie die Düngemittelmenge als kontinuierliche Variable mit linearen Einfluss auf den Ertrag verwenden. Tipp: erzeugen Sie eine kontinuierliche Variable mit `rep(0:3/5,18)`.

(d) Beantworten Sie die Fragen aus dem vorherigen Aufgabenteil auch für ein Modell, in dem Sie einen parabelförmigen Einfluss der Düngemittelmenge auf den Ertrag erlauben, indem Sie die quadrierte Düngemittelmenge als weitere Variable dazunehmen.

(e) Welches der Modelle aus den drei obigen Aufgabenteilen wird vom Akaike-Informationskriterium bevorzugt?

(f) Überprüfen Sie für die obigen Modelle jeweils die Modellannahmen mit den üblichen Visualisierungen.

(g) Visualisieren Sie die Modellvohersagen für die verschiedenen Anbauflächen, Hafersorten und Düngemittelmenge.

**Aufgabe 3** Sie wollen zwei Hirsesorten hinsichtlich ihrer Trockenempfindlichkeit vergleichen. Dazu werden die Pfanzen 7 Tage lang nicht gegossen und dann ihre mittlere Blattfläche bestimmt. Wie viele Pflanzen von jeder Sorte brauchen Sie für den Versuch, wenn ein Blattflächenunterscheid von $20$ auf dem Signifikanzniveau $5\%$ bei einer Testmacht von $80\%$ erkannt werden soll? Verwenden Sie dazu, dass die Standardabweichungen in einem Vorversuch $29.55$ und $60.21$ waren.

**a)** Berechnen Sie die benötigte Stichprobenlänge in jeder Gruppe ohne Verwendung von `R`. Verwenden Sie dazu die Verteilungstafeln von der Vorlesungs-Homepage.

**b)** Berechnen Sie die benötigte Stichprobenlänge in jeder Gruppe mit `R`.

**c)** Angenommen Sie hätten die benötigte Stichprobenlänge nicht bestimmt und sich aus dem Bauch heraus für $20$ Pflanzen pro Sorte entschieden. Wie groß ist dann die Testmacht? Drücken Sie diese Testmacht in Worten als relative Häufigkeit aus.

**Aufgabe 4** In den Flüssen Trinidads sind die Guppys *Poecilia reticulata* verschiedenen Räubern ausgesetzt. Flussabwärts gibt es den großen und gefährlichen *Crenicichla alta*, flussaufwärts den weniger gefährlichen *Rivulus hartii*. Evolutionär-ökologische Überlegungen führen zu der Hypothese, dass die Nachkommen flussabwärts kleiner sind. Um diese Hypothese zu prüfen, werden Sie nach Trinidad fliegen, um das Gewicht von neugeborenen Guppys zu messen. Wie viele neugeborene Guppys müssen Sie vermessen, wenn ein tatsächlicher mittlerer Gewichtsunterschied von $0.4$ mg auf dem Signifikanzniveau $5\%$ erkannt werden soll? Die Testmacht soll $99\%$ Prozent sein, da die Messreihe wegen den Reisekosten recht teuer ist. Aus Voruntersuchungen wissen Sie, dass Sie in den Daten mit einer Standardabweichung von $0.5$ mg rechnen können.

**a)** Ermitteln Sie die benötigte Stichprobenlänge an den beiden Flussabschnitten ohne Verwendung von `R`. Verwenden Sie dazu die Verteilungstafeln von der Vorlesungs-Homepage.

**b)** Berechnen Sie die benötigte Stichprobenlänge an den beiden Flussabschnitten mit `R`.

**c)** Angenommen, die Messreihe würde – rein hypothetisch – $100$ mal durchgeführt werden. In wie vielen Fällen erwarten Sie bei einer Testmacht von $99\%$, dass die Daten keine Signifikanz liefern, wenn der wahre mittlere Gewichtsunterschied tatsächlich $0.4$ mg beträgt.

**d)** Angenommen Sie hätten die benötigte Stichprobenlänge nicht bestimmt und sich aus dem Bauch heraus für $20$ Neugeborene pro Flussabschnitt entschieden. Wie groß ist dann die Testmacht? Drücken Sie diese Testmacht in Worten als relative Häufigkeit aus.

**Aufgabe 5** Experimente müssen sorgfältig durchdacht werden, um Fehler zu vermeiden.

**a)** Im Raum München wurden im Laufe eines Tages $30$ Eichhörnchen (*Sciurus vulgaris*) gefangen und durchnummeriert zum Zwecke eines Verhaltensexperiments. Wie sollen die $30$ Tiere auf zwei Beobachtungsgruppen aufgeteilt werden?

**b)** Sicherlich hat die jahreszeitliche Temperatur einen Einfluss auf das Nuss-Sammelverhalten der Eichhörnchen. Nun möchte man herausfinden, ob auch die Zusammensetzung des Lichtes einen Einfluss auf das Sammelverhalten hat. Die Idee ist, die eine Gruppe blauem Licht ausgesetzen und die andere Gruppe rotem Licht. Wie könnte der Versuch konkret ablaufen? Welche Fehler könnten gemacht werden, welche Einflussgrößen könnten das Ergebnis verfälschen?

**Aufgabe 6** Um den Anteil $p \in [0, 1]$ von Personen in einer (großen) Gruppe, die eine „heikle“ Eigenschaft haben, zu schätzen, betrachten wir folgendes Verfahren: Als Teilnehmer erhalten Sie die Frage, beispielsweise „Haben Sie schon einmal Marihuana geraucht?“ und zwei Würfel. Sie würfeln verdeckt: Wenn die Augensumme $5$ oder $6$ ist, antworten Sie „ja“, wenn sie $8$ oder $9$ ist, antworten Sie „nein“, ansonsten beantworten Sie die Frage.

**a)** Wenn der tatsächliche Anteil der Personen, die die heikle Eigenschaft haben, $p$ ist, wie wahrscheinlich ist es dann, dass eine rein zufällig ausgewählte Person mit „ja“ antwortet?

**b)** Wie kann man anhand der Ergebnisse der Befragung von $n$ Personen den Parameter $p$ erwartungstreu schätzen? Beweisen Sie, dass der Schätzer tatsächlich erwartungstreu ist.

**c)** Berechnen Sie die Varianz des erwartungsreuen Schätzers.