Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik
im Biologie-Bachelorstudiengang der LMU

Wiederholung zum Rechnen mit Zufallsvariablen, Erwartungswerten und (Co-)Varianzen

Dirk Metzler

29. Juli 2020

Inhaltsverzeichnis

1 Zufallsvariablen

1.1 Was sind Zufallsvariablen und Verteilungen?

Nehmen wir an, in einer kleinen Population von $n = 100$ Individuen hat ein neutrales Allel A in der aktuellen Generation eine Häufigkeit von 0.32.

Wie wird die Häufigkeit X von A in der nächsten Generation sein?

Das können wir nicht genau vorhersagen, denn es hängt vom Zufall ab.

X ist eine Zufallsvariable.

Berechnen können wir aber z.B.:

$\mathbb{E}X$ **:** den Erwartungswert von X,

$\Pr(X = 0.32)$ **:** die Wahrscheinlichkeit, dass X einen bestimmten Wert annimmt.

Allerdings müssen wir dazu die Population zunächst stochastisch modellieren, und das Ergebnis wird davon abhängen, wie wir das machen.

Beispiele für Zufallsvariablen

- Ergebnis eines Würfelwurfs
- Karte, die aus einem gemischten Kartenspiel gezogen wird
- Koordinatenpaar des Pfeils in einer Dart-Scheibe

- Größe eines zufällig gezogenen Individuums aus einer Population
- Mittelwert der Größe von 10 aus einer Population gezogenen Individuen
- Jede Statistik, d.h. aus Daten berechnete Werte

Als Zufallsgröße oder Zufallsvariable bezeichnet man das (Mess-)Ergebnis eines zufälligen Vorgangs.

Der Wertebereich $\mathcal{S}$ (engl. state space) einer Zufallsgröße ist die Menge aller möglichen Werte.

Die Verteilung einer Zufallsgröße X weist jeder Menge $A \subseteq \mathcal{S}$ die Wahrscheinlichkeit $\Pr(X \in A)$ zu, dass X einen Wert in A annimmt.

Für Zufallsgrößen werden üblicherweise Großbuchstaben verwendet (z.B. X, Y, Z), für konkrete Werte Kleinbuchstaben.

Binomialverteilung

Sei X die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit von jeweils p. Dann gilt für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

und X heißt *binomialverteilt*, kurz:

$$X \sim \text{bin}(n, p).$$

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Binomialverteilung weist jeder Teilmenge $U \subseteq \{0, 1, \ldots, n\}$ die folgende Wahrscheinlichkeit zu:

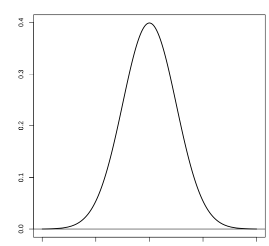
$$\Pr(X \in U) = \sum_{k \in U} \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

Sei X normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, kurz:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

X hat dann die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



"Gauß-Glocke" mit $\mu = 0$ und $\sigma = 1$

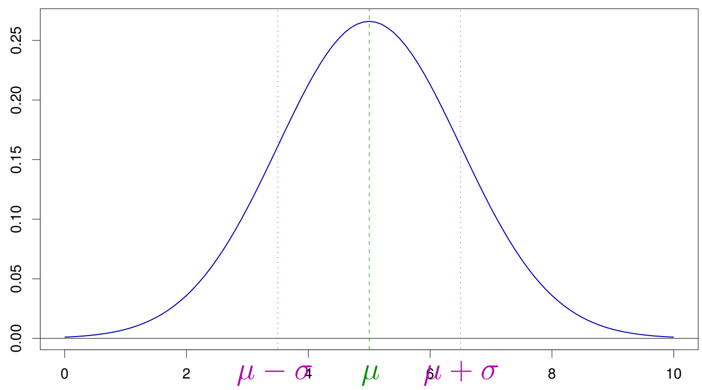
Die Verteilung von X ordnet jeder messbaren[1] Teilmenge U von $\mathbb{R}$ die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr(X \in U) = \int_U \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, dx$$

zu.

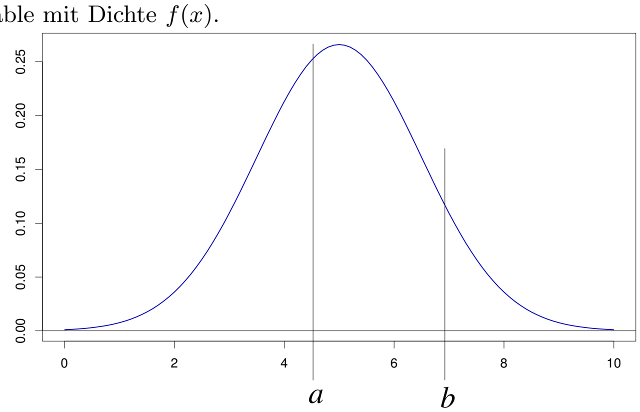
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

[1] erforderliche Einschränkung, damit das Integral überhaupt existiert (mathematisch etwas komplizierter)



Dichten brauchen Integrale

Sei Z eine Zufallsvariable mit Dichte $f(x)$.



Dann gilt

$$\Pr(Z \in [a,b]) = \int_a^b f(x)\mathsf{d}x.$$

Frage: Wie berechnet man $\Pr(Z = 5)$?

Antwort: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $\Pr(Z = x) = 0$ (da Fläche der Breite 0)

Was wird dann aus $\mathbb{E}Z = \sum_{x \in \mathcal{S}} x \cdot \Pr(Z = x)$?

Bei einer kontinuierlichen Zufallsvariable mit Dichtefunktion f definiert man:

$$\mathbb{E}Z := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\mathsf{d}x$$

Die Normalverteilung in *R*

Die Normalverteilung hat in *R* das Kürzel *'norm'*.

Es gibt 4 *R*-Befehle:

dnorm(): Dichte der Normalverteilung (**d**ensity)
rnorm(): Ziehen einer Stichprobe (**r**andom sample)
pnorm(): Verteilungsfunktion der Normalverteilung (**p**robability)
qnorm(): Quantilfunktion der Normalverteilung (**q**uantile)

1.2 Rechnen mit Zufallsvariablen

Zufallsvariablen, deren Werte Zahlen oder Vektoren sind, heißen auch Zufallszahlen bzw. -vektoren.

Mit ihnen kann man rechnen.

Rechnen mit Zufallsvariablen

Am Beispiel der Summe $W_1 + W_2$ zweier Würfelergebnisse W_1, W_2 haben wir gesehen, dass man mit Zufallsvariablen auch wie mit normalen Variablen rechnen kann. Auch $W_1 + W_2$ ist wieder eine Zufallsvariable und es gilt:

$$\begin{aligned}\Pr(W_1 + W_2 = k) &= \sum_{\{(x,y)\ :\ x+y=k\}} \Pr(W_1 = x,\ W_2 = y) \\ &= \sum_x \Pr(W_1 = x,\ W_2 = k - x)\end{aligned}$$

In Worten: $\Pr(W_1 + W_2 = k)$ ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Wertepaare für W_1 und W_2, die in Summe k ergeben.

Rechnen mit Zufallsvariablen

Sie können Zufallsvariablen auch mit Zahlen multiplizieren. Stellen Sie sich z.B. vor, dass Sie bei einem Brettspiel die "Speed-Karte" gezogen haben, die Ihnen erlaubt, immer das Doppelte $D = 2 \cdot W$ der gewürfelten Augenzahl W voranzuschreiten.

Dann ist $D = 2 \cdot W$ ebenfalls eine Zufallsvariable. Ihre möglichen Werte sind 2,4,6,8,10 und 12, und D nimmt jeden dieser Werte mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{6}$ an.

Anwendung einer Funktion auf eine Zufallsvariable

Wenn man eine Funktion f auf eine Zufallsvariable X anwendet, erhält man eine Zufallsvariable $Y = f(X)$.

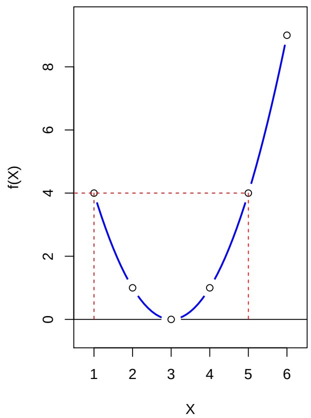
Als Beispiel stellen wir uns ein Spiel vor, bei dem man, wenn man das Würfelergebnis X hat, $f(X) = (X - 3)^2$ Felder vorrücken darf.

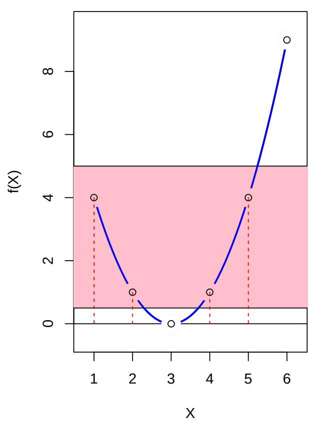
Dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass man 4 Felder vorrücken darf, also dass die Zufallsvariable $f(X)$ den Wert 4 hat (also X den Wert 1 oder 5):

$$\Pr(f(X) = 4) = \Pr(X \in \{1, 5\}) = 1/3.$$

Um das mathmatisch klar zu fassen, benötigen wir den Begriff **Urbild**: Für eine Menge M ist $f^{-1}(M) = \{x\ :\ f(x) \in M\}$ das **Urbild** von M unter f, also in Worten: die Menge aller x, die von f auf ein Element von M abgebildet werden.

Das Urbild einer Menge unter einer Funktion f





Die Funktion $f : x \mapsto (x-3)^2$ für $x \in \{1,2,3,4,5,6\})$ ist nicht umkehrbar. So ist $f^{-1}(4)$ nicht definierbar, denn es wäre ja auch $f(1) = 4 = f(5)$. Etwas anderes ist jedoch $f^{-1}(\{4\})$. Hier ist mit f^{-1} keine Umkehrfunktion gemeint, sondern die
Urbildfunktion, die auf Mengen operiert:

$$f^{-1}(\{4\}) \;=\; \{x \;:\; f(x) \in \{4\}\} \;=\; \{1,5\}$$

Oder z.B.:

$$f^{-1}([0.5,5]) \;=\; \{x \;:\; f(x) \in [0.5,5]\} \;=\; \{1,2,4,5\}$$

1.3 Stochastische (Un-)Abhängigkeit, bedingte Wahrscheinlichkeiten

Stochastische Unabhängigkeit

Definition 1 (stochastische Unabhängigkeit) *Ereignisse U und V sind sind (stochastisch) unabhängig, wenn gilt*

$$\Pr(U,V) = \Pr(U) \cdot \Pr(V).$$

Zwei Zufallsgrößen X und Y sind (stochastisch) unabhängig, wenn jedes Ereignis der Art $\{X \in A\}$ von jedem Ereignis der Art $\{Y \in B\}$ stochastisch unabhängig ist.

Beispiel:

- Werfen zweier Würfel: X = Augenzahl Würfel 1, Y = Augenzahl Würfel 2.

$$\Pr(X=2,\; Y=5) = \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \Pr(X=2) \cdot \Pr(Y=5)$$

"Stochastisch unabhängig" bedeutet nicht immer, das zwei Zufallsexperimente ganz unabhängig voneinander durchgeführt wurden. Z.B. beim Ziehen einer Karte aus einem Spiel mit 32 Karten sei

Ereignis A: Die gezogene Karte ist ein Ass

Ereignis $\heartsuit$: Die gezogene Karte ist von der Farbe Herz

Dann gilt

$$\Pr(\heartsuit, A) = \frac{1}{32} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \Pr(\heartsuit) \cdot \Pr(A).$$

Also sind die Ereignisse A und $\heartsuit$ stochstisch unabhängig.

- Bedingte Wahrscheinlichkeit: Wahrscheinlichkeit des Ereignisses U unter der Bedingung V

  $$\Pr(U|V) := \frac{\Pr(U,V)}{\Pr(V)}$$

  „bedingte Wahrscheinlichkeit von U, gegeben V"

  Daraus ergibt sich also auch:

  $$\Pr(U,V) = \Pr(V) \cdot \Pr(U|V) = \Pr(U) \cdot \Pr(V|U)$$

A, B Ereignisse

Bedingte Wahrscheinlichkeit von A, gegeben B (sofern $\Pr(B) > 0$):

$$\Pr(A|B) = \frac{\Pr(A \cap B)}{\Pr(B)}$$

($A \cap B$:= A und B treten beide ein) "gegeben B" bedeutet: wenn man schon weiß, dass B eintritt oder eingetreten ist[0.3cm]Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (mit B^c:={B tritt nicht ein}):

$$\Pr(A) = \Pr(B)\Pr(A|B) + \Pr(B^c)\Pr(A|B^c)$$

Bayes-Formel:

$$\Pr(B|A) = \frac{\Pr(B)\Pr(A|B)}{\Pr(A)}$$

Beispiel medizinischer Test, etwa Mammographie:

A**:** Das Mammogramm zeigt Krebs an.

B**:** Die Patientin hat Krebs.

Die nicht bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr(B)$ heißt auch *a-priori*-Wahrscheinlichkeit für B, d.h. die Wahrscheinlichkeit, die man B zuordnet, *bevor* man die Daten A gesehen hat. In unserem Beispiel war 0.008 die Wahrscheinlichkeit, dass eine Vorsorgepatientin Brustkrebs hat.[0.5cm] Die bedingte Wahrscheinlichkeit $\Pr(B|A)$ heißt auch *a-posteriori*-Wahrscheinlichkeit für B. Das ist die Wahrscheinlichkeit, die man B zuweist, *nachdem* man die Daten A gesehen hat.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass die Patientin Krebs hat, gegeben, dass das Mammogramm dies anzeigt, ist:

$$\begin{aligned}
\Pr(B|A) &= \frac{\Pr(B) \cdot \Pr(A|B)}{\Pr(A)} \\
&= \frac{\Pr(B) \cdot \Pr(A|B)}{\Pr(B) \cdot \Pr(A|B) + \Pr(B^C) \cdot \Pr(A|B^C)} \\
&\quad \text{Mit den Werten aus dem Beispiel aus der Vorlesung:} \\
&= \frac{0.008 \cdot 0.9}{0.008 \cdot 0.9 + 0.992 \cdot 0.07} \approx 0.0939
\end{aligned}$$

Bedingt darauf, dass das Mammogramm Krebs anzeigt, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass die Patientin Krebs hat, also lediglich 9.4%.

2 Erwartungswerte

Definition 2 (Erwartungswert) *Sei X eine Zufallsvariable mit endlichem oder abzählbarem Wertebereich $\mathcal{S} = \{x_1, x_2, x_3 \ldots\} \subseteq \mathbb{R}$. Dann ist der Erwartungswert von X definiert durch*

$$\mathbb{E}X = \sum_{x \in \mathcal{S}} x \cdot \Pr(X = x)$$

Bei einer kontinuierlichen Zufallsvariable Z mit Dichtefunktion f lautet die Definition:

$$\mathbb{E}Z := \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \mathsf{d}x$$

Beispiele

- Sei X eine 0-1-Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$. Dann gilt

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot \Pr(X = 1) + 0 \cdot \Pr(X = 0) = \Pr(X = 1) = p$$

- Sei W die Augenzahl bei einem Würfelwurf. Dann gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}W &= 1 \cdot \Pr(W = 1) + 2 \cdot \Pr(W = 2) + \ldots + 6 \cdot \Pr(W = 6)\\ &= 1 \cdot \tfrac{1}{6} + 2 \cdot \tfrac{1}{6} + \ldots + 6 \cdot \tfrac{1}{6} = 21\tfrac{1}{6} = 3.5\end{aligned}$$

- Ist k_x die Häufigkeit des Wertes x in einer Gesamtheit der Größe n, aus der rein zufällig gezogen wird, so folgt:

$$\mathbb{E}X = \sum_x x \cdot \frac{k_x}{n} = \frac{\sum_x x \cdot k_x}{n}$$

Rechnen mit Erwartungswerten

Satz 1 (Linearität des Erwartungswerts) *Sind X und Y Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$ und ist $a \in \mathbb{R}$, so gilt:*

- $\mathbb{E}(a \cdot X) = a \cdot \mathbb{E}X$
- $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y$

Satz 2 (Nur für Unabhängige!) *Sind X und Y **stochastisch unabhängige** Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{R}$, so gilt*

- $\mathbb{E}(X \cdot Y) = \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y.$

Im allgemeinen gilt $\mathbb{E}(X \cdot Y) \neq \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$. Beispiel:

$$\mathbb{E}(W \cdot W) = \tfrac{91}{6} = 15.167 > 12.25 = 3.5 \cdot 3.5 = \mathbb{E}W \cdot \mathbb{E}W$$

Erwartungswert der Binomialverteilung

Seien $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ die Indikatorvariablen der n unabhängigen Versuche d.h.

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{falls der } i-\text{te Versuch gelingt} \\ 0 & \text{falls der } i-\text{te Versuch scheitert} \end{cases}$$

Dann ist $X = Y_1 + \cdots + Y_n$ binomialverteilt mit Parametern (n, p), wobei p die Erfolgswahrscheinlichkeit der Versuche ist.

Wegen der Linearität des Erwartungswerts gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X &= \mathbb{E}(Y_1 + \cdots + Y_n) \\ &= \mathbb{E}Y_1 + \cdots + \mathbb{E}Y_n \\ &= p + \cdots + p \;=\; np \end{aligned}$$

Wir halten fest:

$$X \sim \mathrm{bin}(n, p) \Rightarrow \mathbb{E}X = n \cdot p$$

3 Varianz, Standardabweichung, Kovarianz und Korrelation

Definition 3 (Varianz, Kovarianz und Korrelation) *Die Varianz einer $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsgröße X ist*

$$VarX = \sigma_X^2 = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right].$$

$\sigma_X = \sqrt{Var\ X}$ ist die Standardabweichung.
Ist Y eine weitere reellwertige Zufallsvariable, so ist

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)\right]$$

die Kovarianz von X und Y.
Die Korrelation von X und Y ist

$$Cor(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}.$$

Die Varianz

$$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}X)^2\right]$$

ist die durchschnittliche quadrierte Abweichung vom Mittelwert.

Die Korrelation

$$\mathrm{Cor}(X, Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

liegt immer im Intervall $[-1, 1]$. Die Variablen X und Y sind

- positiv korreliert, wenn X und Y tendenziell entweder beide überdurchschnittlich große Werte oder beide unterdurchschnittlich große Werte annehmen.
- negativ korreliert, wenn X und Y tendenziell auf verschiedenen Seiten ihrer Erwartungswerte liegen.

Sind X und Y unabhängig, so sind sie auch unkorreliert, d.h. $\mathrm{Cor}(X, Y) = 0$.

Bernoulli-Verteilung

Eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable Y mit Erfolgsws $p \in [0, 1]$ hat Erwartungswert

$$\mathbb{E}Y = p$$

und Varianz

$$\mathrm{Var}\ Y = p \cdot (1 - p)$$

Beweis: Aus $\Pr(Y = 1) = p$ und $\Pr(Y = 0) = (1 - p)$ folgt

$$\mathbb{E}Y = 1 \cdot p + 0 \cdot (1 - p) = p.$$

Varianz:

$$\begin{aligned}\text{Var } Y &= \mathbb{E}\big(Y^2\big) - \big(\mathbb{E}Y\big)^2 \\ &= 1^2 \cdot p + 0^2 \cdot (1-p) - p^2 = p \cdot (1-p)\end{aligned}$$

Beispiel: Würfel

Varianz des Würfelergebnisses W:

$$\begin{aligned}\text{Var}(W) &= \mathbb{E}\big[\big(W - \mathbb{E}W\big)^2\big] \\ &= \mathbb{E}\big[\big(W - 3.5\big)^2\big] \\ &= (1-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + (2-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} + \ldots + (6-3.5)^2 \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{17.5}{6} \\ &= 2.91667\end{aligned}$$

Beispiel: Die empirische Verteilung

Sind $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ Daten und entsteht X durch rein zufälliges Ziehen aus diesen Daten (d.h. $\Pr(X = x) = \frac{n_x}{n}$, wobei $n_x = |\{i \ : \ x_i = x\}|$ die Anzahl der x_i ist mit $x_i = x$), so gilt:

$$\mathbb{E}X = \sum_x x \cdot \frac{n_x}{n} = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i = \overline{x}$$

und

$$\text{Var } X = \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}X\big)^2\big] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2$$

Sind $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ Daten und entsteht (X, Y) durch rein zufälliges Ziehen aus diesen Daten (d.h. $\Pr((X,Y) = (x,y)) = \frac{|\{i \ : \ (x_i, y_i) = (x,y)\}|}{n}$), so gilt:

$$\text{Cov }(X, Y) = \mathbb{E}\big[\big(X - \mathbb{E}X\big)\big(Y - \mathbb{E}Y\big)\big] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})$$

Definition 4 (Korrigierte Stichprobenvarianz, -standardabweichung und -kovarianz) *Ist $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Stichprobe der Zufallsgrößen X, schätzen wir die Varianzen σ_X^2 und die Standardabweichung σ_X von X in der Regel durch*

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \textit{und} \quad s_x = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2},$$

und bei gepaarten Stichproben $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ die Kovarianz Cov(X, Y) durch

$$cov(x, y) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})$$

sowie die Korrelation Cor(X, Y) durch

$$cor(x, y) = \frac{cov(x, y)}{s_x \cdot s_y}.$$

Rechenregeln für Kovarianzen

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[(X - EX) \cdot (Y - \mathbb{E}Y)]$

- Sind X und Y unabhängig, so folgt $\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$ (die Umkehrung gilt nicht!)
- $\mathrm{Cov}(X,Y)$=$\mathrm{Cov}(Y,X)$
- $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(X \cdot Y) - \mathbb{E}X \cdot \mathbb{E}Y$
- $\mathrm{Cov}(a \cdot X, Y) = a \cdot \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X, a \cdot Y)$
- $\mathrm{Cov}(X+Z, Y) = \mathrm{Cov}(X,Y) + \mathrm{Cov}(Z,Y)$
- $\mathrm{Cov}(X, Z+Y) = \mathrm{Cov}(X,Z) + \mathrm{Cov}(X,Y)$

Die letzten drei Regeln beschreiben die Bilinearität der Kovarianz.

Rechenregeln für die Korrelation

$\mathrm{Cor}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$

- $-1 \leq \mathrm{Cor}(X,Y) \leq 1$
- $\mathrm{Cor}(X,Y) = \mathrm{Cor}(Y,X)$
- $\mathrm{Cor}(X,Y) = \mathrm{Cov}(X/\sigma_X, Y/\sigma_Y)$
- $\mathrm{Cor}(X,Y) = 1$ genau dann wenn Y eine wachsende, affin-lineare Funktion von X ist, d.h. falls es $a > 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $Y = a \cdot X + b$
- $\mathrm{Cor}(X,Y) = -1$ genau dann wenn Y eine fallende, affin-lineare Funktion von X ist, d.h. falls es $a < 0$ und $b \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $Y = a \cdot X + b$

Rechenregeln für Varianzen

$\mathrm{Var}X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$

- $\mathrm{Var}X = \mathrm{Cov}(X,X)$
- $\mathrm{Var}X = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}X)^2$
- $\mathrm{Var}(a \cdot X) = a^2 \cdot \mathrm{Var}X$
- $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)$
- $\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^n X_i\Big) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}\big(X_i\big) + 2 \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^{j-1} \mathrm{Cov}(X_i, X_j)$
- Sind (X,Y) stochastisch unabhängig, so folgt:

  $$\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}X + \mathrm{Var}Y$$

  (Beweise an der Tafel; ergeben sich aus den Rechenregeln für Kovarianzen)

Standardabweichung einer Summe

Angenommen, es sind bekannt:

σ_X Standardabweichung von X

σ_Y Standardabweichung von Y

Wie berechnet man die Standardabweichung σ_{X+Y} von $X+Y$?

Antwort: Man benötigt zusätzlich $\mathrm{Cov}(X,Y)$ oder $\mathrm{Cor}(X,Y)$. Sei z.B. $\mathrm{Cor}(X,Y)$ gegeben.

Dann verwenden wir die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y) \\ \mathrm{Cov}(X,Y) &= \mathrm{Cor}(X,Y) \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y \end{aligned}$$

Rechne also erst in Varianzen um und am Ende $\sigma_{X+Y} = \sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)}$. Der Rechenweg als Herleitung einer Formel zusammengefasst:

$$\begin{aligned} \sigma_{X+Y} &= \sqrt{\mathrm{Var}(X+Y)} \\ &= \sqrt{\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(Y) + 2 \cdot \mathrm{Cov}(X,Y)} \\ &= \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2 \cdot \mathrm{Cor}(X,Y) \cdot \sigma_X \cdot \sigma_Y} \end{aligned}$$

Binomialverteilung

Seien nun $Y_1, \cdots, Y_n$ unabhängig und Bernoulli-verteilt mit Erfolgsws p. Dann gilt

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i =: X \sim \mathrm{bin}(n,p)$$

und es folgt:

$$\mathrm{Var}\ X = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} Y_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}\ Y_i = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Binomialverteilung

Satz 3 (Erwartungswert und Varianz der Binomialverteilung) *Ist X binomialverteilt mit Parametern (n,p), so gilt:*

$$\mathbb{E}X = n \cdot p$$

und

$$Var\ X = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Beispiel: Genetische Drift

In einer haploiden Population von n Individuen habe Allel A die Häufigkeit p. Wir gehen wieder davon aus, dass jedes der n Individuen der nächsten Generation unabhängig von den anderen mit W'keit p Allel A bekommt. Die absolute Häufigkeit K von A in der nächsten Generation ist damit (n,p)-binomialverteilt.

Dann folgt für die relative Häufigkeit $X = K/n$ in der nächsten Generation:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(K/n) = \mathrm{Var}(K)/n^2 = n \cdot p \cdot (1-p)/n^2$$

$$= \frac{p \cdot (1-p)}{n}$$

Mit den Rechenregeln konnten wir auch beweisen:

Satz 4 *Sind $X_1, X_2, \ldots X_n$ unabhängige $\mathbb{R}$-wertige Zufallsgrößen mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, so gilt für $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$:*

$$\mathbb{E}\overline{X} = \mu$$

und

$$Var\ \overline{X} = \frac{1}{n}\sigma^2,$$

d.h.

$$\sigma_{\overline{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Insbesondere: Der Standardfehler $\frac{s}{\sqrt{n}}$ ist ein Schätzer der Standardabweichung $\sigma_{\overline{X}}$ des Stichprobenmittels $\overline{X}$ der Stichprobe $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.
Die Stichproben-Standardabweichung s ist ein Schätzer der Standardabweichung σ der Grundgesamtheit.

Beweis: Linearität des Erwartungswertes impliziert

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\overline{X} &= \mathbb{E}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}(X_i)\\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mu = \mu.\end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit der X_i vereinfacht die Varianz zu

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\ \overline{X} &= \mathrm{Var}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\Big) = \frac{1}{n^2}\mathrm{Var}\Big(\sum_{i=1}^{n} X_i\Big)\\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}\big(X_i\big) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 = \frac{1}{n}\sigma^2\end{aligned}$$

Beispiel: Erwartungstreue der korrigierten Stichprobenvarianz

Mit etwas mehr Mühe folgte auch:
Für $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig identisch verteilt mit Varianz σ^2 ist die korrigierte Stichprobenvarianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\big(X_i - \overline{X}\big)^2$$

ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2, das heißt:

$$\mathbb{E}(s^2) = \sigma^2$$

(Aber die Erwartungstreue gilt nicht für s, sondern i.A. gilt $\mathbb{E}s < \sigma$).

Beispiel: Standardfehler der Steigung einer Regressionsgeraden

$$y_i = a + b \cdot x_i + \varepsilon_i \qquad \text{mit } \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

nicht zufällig: a, b, x_i, σ^2 zufällig: ε_i, y_i

$$\mathrm{Var}(y_i) = \mathrm{Var}(a + b \cdot x_i + \varepsilon_i) = \mathrm{Var}(\varepsilon_i) = \sigma^2$$

und $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sind stochastisch unabhängig.

$$\hat{b} = \frac{\sum_i y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\hat{b}) &= \mathrm{Var}\left(\frac{\sum_i y_i(x_i-\bar{x})}{\sum_i(x_i-\bar{x})^2}\right) = \frac{\mathrm{Var}\left(\sum_i y_i(x_i-\bar{x})\right)}{\left(\sum_i(x_i-\bar{x})^2\right)^2} = \frac{\sum_i \mathrm{Var}\left(y_i\right)(x_i-\bar{x})^2}{\left(\sum_i(x_i-\bar{x})^2\right)^2} \\ &= \sigma^2\cdot\frac{\sum_i(x_i-\bar{x})^2}{\left(\sum_i(x_i-\bar{x})^2\right)^2} = \sigma^2 \Bigg/ \sum_i(x_i-\bar{x})^2\end{aligned}$$

Standardfehler der Steigung einer Regressionsgeraden

Tatsächlich ist $\hat{b}$ Normalverteilt mit Mittelwert b und

$$\mathrm{Var}(\hat{b}) = \sigma^2 \Bigg/ \sum_i(x_i-\bar{x})^2$$

Problem: Wir kennen σ^2 nicht. Wir schätzen σ^2 mit Hilfe der beobachten Residuenvarianz durch

$$s^2 := \frac{\sum_i\left(y_i-\hat{a}-\hat{b}\cdot x_i\right)^2}{n-2}$$

Zu beachten ist, dass durch $n-2$ geteilt wird. Das hat damit zu tun, dass zwei Modellparameter a und b bereit geschätzt wurden, und somit 2 Freiheitsgrade verloren gegangen sind.

$$\mathrm{Var}(\hat{b}) = \sigma^2 \Bigg/ \sum_i(x_i-\bar{x})^2$$

Schätze σ^2 durch

$$s^2 = \frac{\sum_i\left(y_i-\hat{a}-\hat{b}\cdot x_i\right)^2}{n-2}$$

Dann ist

$$\frac{\hat{b}-b}{s\Big/\sqrt{\sum_i(x_i-\bar{x})^2}}$$

Student-t-verteilt mit $n-2$ Freiheitsgraden und wir können den t-Test anwenden, um die Nullhypothese $b=0$ zu testen.