

Aufgabe 1 Der Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit für zwei Ereignisse U und V lautet

$$\Pr(U) = \Pr(V) \cdot \Pr(U|V) + \Pr(V^c) \cdot \Pr(U|V^c),$$

wobei V^c das Gegenereignis von V bezeichnet. Beweisen Sie diesen Satz und verwenden Sie dabei ausschließlich die Einschluss-Ausschluss-Formel, die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeiten, elementare Mengenlehre (angewendet auf Ereignisse) und das Axiom, dass das unmögliche Ereignis die Wahrscheinlichkeit 0 hat.

Aufgabe 2 (Berechnung von Erwartungswerten) Sei X eine Zufallsvariable mit möglichen Werten in $\{1, 2, 3\}$ und Verteilung

$$\Pr(X = 1) = \frac{1}{2} \quad \Pr(X = 2) = \frac{1}{3} \quad \Pr(X = 3) = \frac{1}{6}$$

Berechnen Sie per Hand

- (a) den Erwartungswert $\mathbb{E}X$ von X (Ergebnis: $\frac{5}{3}$),
- (b) $\mathbb{E}(X^2)$,
- (c) die Varianz $\text{Var}(X)$ von X ,
- (d) $\mathbb{E}(X^2 + X)$, und
- (e) $\mathbb{E}[(X + 1)^2]$.

(Hinweis: Verwenden Sie dazu die Definition des Erwartungswerts und/oder Linearität.)

Aufgabe 3 Sei X die Zufallsvariable mit Werten in $\{1, 2, 3\}$ und Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1\}$. Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) sei

$$\begin{aligned} \Pr(X = 1, Y = 0) &= \frac{1}{2} & \Pr(X = 1, Y = 1) &= 0 \\ \Pr(X = 2, Y = 0) &= \frac{1}{6} & \Pr(X = 2, Y = 1) &= \frac{1}{6} \\ \Pr(X = 3, Y = 0) &= \frac{1}{12} & \Pr(X = 3, Y = 1) &= \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Berechnen Sie per Hand

- (a) $\Pr(Y = 0)$ und $\Pr(Y = 1)$,
- (b) den Erwartungswert $\mathbb{E}Y$ von Y ,
- (c) $\mathbb{E}(Y^2)$,
- (d) die Standardabweichung $\sqrt{\text{Var}(Y)}$ von Y ,
- (e) die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ von X und Y ,
- (f) die Varianz $\text{Var}(X)$ von X , und
- (g) die Korrelation $\text{Cor}(X, Y)$ zwischen X und Y .

Aufgabe 4 Auf einem Acker werden zweimal pro Jahr Erbsen geerntet. Der durchschnittliche Ertrag beträgt 300 kg bei der ersten Ernte und 400 kg bei der zweiten. Die Erträge schwanken von Jahr zu Jahr, mit einer Standardabweichung von 40 kg bei der ersten Ernte und 50 kg bei der zweiten. Dabei sind die Erträge zwischen den beiden Ernten korreliert mit einem Korrelationskoeffizienten von 0.1. Die Einnahmen beim Verkauf der Erbsen betragen bei der ersten Ernte 1,20 Euro/kg und bei der zweiten Ernte 80 Cent/kg. Berechnen Sie

- (a) den Erwartungswert für die Summe der Einnahmen aus den beiden Ernten eines Jahres,
- (b) die Standardabweichung für die Summe der Einnahmen aus den beiden Ernten und
- (c) die Korrelation zwischen den Einnahmen aus den beiden Ernten.

Aufgabe 5 Pflanzen einer bestimmten Art erreichen an einem bestimmten Standort nach vier Monaten eine Wuchshöhe von durchschnittlich 123 cm. Die Wuchshöhe hängt aber auch von den Bedingungen innerhalb der vier Monate ab, insbesondere der Regenmenge R und der Sonneneinstrahlung S , die in bestimmten Einheiten gemessen werden. R und S unterscheiden sich an dem Standort natürlich zwischen den Jahren, und die Standardabweichungen betragen $\sigma_R = 4.3$ und $\sigma_S = 7.5$. Da es etwas seltener sonnig ist, wenn es mehr regnet, gilt $\text{Cor}(R, S) = -0.1$. Mit einer Erhöhung von R oder S vergrößern die Pflanzenhöhe um 1.2 bzw. 0.8 cm pro Einheit. Allerdings ist aufgrund anderer Umwelteinflüsse und genetischer Faktoren ein zufällig variierender Wert V auf die Wuchshöhe zu addieren, der eine Standardabweichung von 6.7 cm aufweist und nicht mit R oder S korreliert ist. Berechnen Sie die sich insgesamt ergebende Standardabweichung in der Wuchshöhe der Pflanzen.

Aufgabe 6

- (a) Stellen Sie sich ein einfaches Würfelspiel vor, bei dem Sie immer so viele Felder vorrücken dürfen, wie der Würfel Augen anzeigt. Sei X die Anzahl der Felder, die Sie vorangekommen sind, nachdem Sie zehnmal an der Reihe waren. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X . (Gehen Sie davon aus, dass das Spielfeld groß genug ist, so dass Sie nicht an Grenzen stoßen.)
- (b) Lösen Sie diese Aufgabe auch mit folgender Regelvariante: Wenn Sie eine Sechs gewürfelt haben, dürfen Sie ein zweites Mal würfeln und die Summe der beiden Augenzahlen vorrücken. (Falls beim zweiten Wurf wieder eine Sechs kommt, dürfen Sie jedoch nicht noch ein drittes Mal würfeln.)