Dr. M. Hutzenthaler, Prof. D. Metzler WiSe 2011/12

Exercises for the course

“Mathematical modeling in biology”

Sheet 09

Exercise 36: Selection in the Moran model

Consider the behavior of a selected locus when alleles B and b have relative fitnesses $1 + s$ and 1 where $s \geq 0$. This means that type B individuals "produce $1 + s$ times as many offspring as those of type b". The type is inherited from the parent. Here we consider a model in the spirit of the Moran model as continuous time is easier to model here.

- Think of a model which matches the above discreption. For example, you could specify rates per individual.
- Let p_t be the fraction of individuals of type B at time $t \in [0, \infty)$. What are the transition rates of the model?

Exercise 37: Kontaktprozess

Ein einfaches Modell in stetiger Zeit für die Ausbreitung einer Krankheit in einer räumlich strukturierten Population ist folgender sogenannter Kontaktprozess. Wir nehmen zur Vereinfachung eine ein-dimensionale Welt an. Individuen sind entprechend $\mathbb{Z}$ angeordnet. Beispielsweise hat Individuum Nummer 4 nur Kontakt mit 3 und 5. Ein Zustand η des Systems gibt für jedes Individuum $\in \mathbb{Z}$ an, ob es infiziert ist (1) oder nicht (0). Es ist also η eine Funktion von $\mathbb{Z}$ nach $\{0, 1\}$ und $\eta(4) = 1$ bedeutet, dass Individuum 4 infiziert ist. Die Dynamik des Kontaktprozesses ist wie folgt:

- Jeder Infizierte gesundet mit Rate 1.
- Jedes Paar von Nachbarn hat mit Rate λ miteinander Kontakt. Ist einer der beiden infiziert, so ist der andere nach dem Kontakt ebenfalls infiziert. Der Parameter λ ist also die effektive Kontaktrate.

Was sind die Übergangsraten des Kontaktprozesses? Betrachten Sie dazu Individuum $i \in \mathbb{Z}$ und überlege, mit welcher Rate i gesundet und welcher Rate sich i ansteckt.

Exercise 38: Wählermodell

Das sogenannte Wählermodell ist ein einfaches Modell in stetiger Zeit für die Verbreitung einer Meinung beispielsweise bezüglich von Parteien. Jedes Individuum hat entweder die Meinung 0 (zB pro Republikaner) oder die Meinung 1 (zB pro Demokraten). Die Individuen seien im zweidimensionalen Gitter $\mathbb{Z}^2$ angeordnet. Insbesondere hat jedes Individuum genau 4 Nachbarn, mit denen es seine Meinung austauscht. Die Dynamik des Wählermodells ist wie folgt:

- Jedes Paar von Nachbarn hat mit Rate 1 Kontakt miteinander.
- Haben zwei Individuen Kontakt miteinander, so übernimmt einer die Meinung des anderen. Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ übernimmt der erste die Meinung des zweiten und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ übernimmt der zweite die Meinung des ersten.

Was sind die Übergangsraten des Wählermodells?

Exercise 39: Branching random walk

Let $p_k := \mathbb{P}(N = k)$, $k \in \mathbb{N}_0$, be the offspring distribution and let $m(i,j)$, $i,j \in \mathbb{Z}^d$, be a stochastic matrix, that is, $m(i,j) \geq 0$ for $i,j \in \mathbb{Z}^d$ and $\sum_{j \in \mathbb{Z}^d} m(i,j) = 1$ for $i \in \mathbb{Z}^d$. In the associated branching random walk, individuals on deme $i \in \mathbb{Z}^d$ migrate with rate $m(i,j)$ to deme $j \in \mathbb{Z}^d$. Moreover at rate $\beta \geq 0$, individuals are replaced by a random number N of offspring. All involved Poisson processes and offspring variables are assumed to be independent. The state space is the set of configurations with finite total populations, that is, the set of $\eta \in \mathbb{N}_0^{\mathbb{Z}^d}$ such that $\sum_{i \in \mathbb{Z}^d} \eta(i) < \infty$. Put up the transition rates of this branching random walk $(X_t)_{t \geq 0}$.