Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Biologen

4. Der zwei-Stichproben-*t*-Test

(*t*-Test für ungepaarte Stichproben)

und der Wilcoxon-Test

Matthias Birkner & Dirk Metzler

http://www.zi.biologie.uni-muenchen.de/evol/StatGen.html

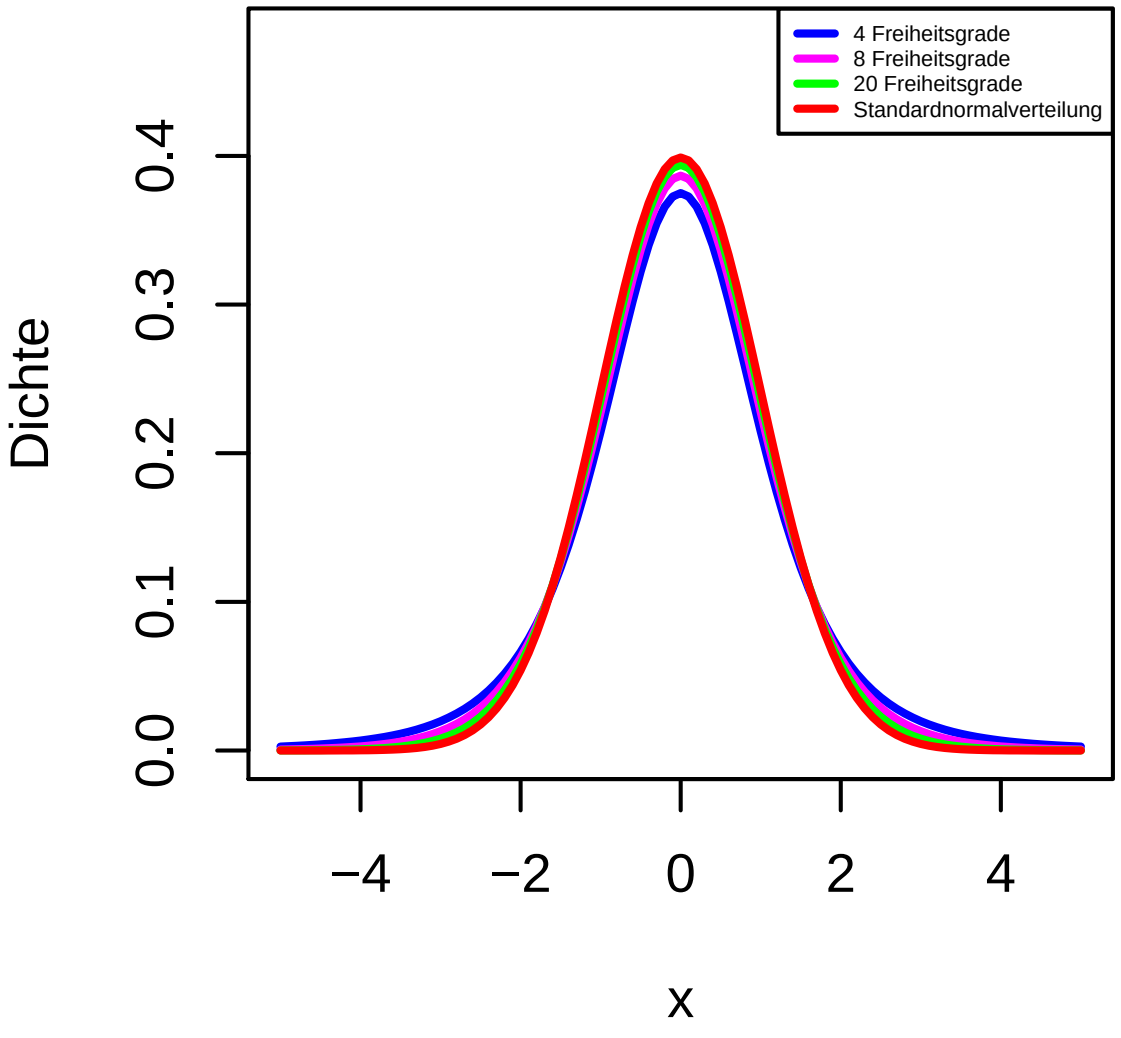
19. Mai 2009

1. Wiederholung: Ein-Stichproben-t-Test
2. t-Test für ungepaarte Stichproben
   - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
3. Wilcoxons Rangsummentest
   - Motivation
   - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
4. Zusammenfassung

Inhalt

1. Wiederholung: Ein-Stichproben-t-Test
2. t-Test für ungepaarte Stichproben
   - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
3. Wilcoxons Rangsummentest
   - Motivation
   - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
4. Zusammenfassung

„Student“und seine Verteilung(en)



William S. Gosset,
1876–1937

Welche t-Werte sind “auf dem 5%-Niveau” signifikant?

Anzahl Freiheitsgrade	$\lvert t \rvert \geq \ldots$
5	2.57
10	2.23
20	2.09
30	2.04
100	1.98
∞	1.96

```
> qt(0.025,df=c(5,10,20,30,100,1e100))
[1] -2.570582 -2.228139 -2.085963 -2.042272 -1.983972
-1.959964
```

Inhalt

1 Wiederholung: Ein-Stichproben-*t*-Test

2 t-Test für ungepaarte Stichproben
- Beispiel: Backenzähne von Hipparions

3 Wilcoxons Rangsummentest
- Motivation
- Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben

4 Zusammenfassung

Inhalt

1 Wiederholung: Ein-Stichproben-t-Test

2 t-Test für ungepaarte Stichproben
- Beispiel: Backenzähne von Hipparions

3 Wilcoxons Rangsummentest
- Motivation
- Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben

4 Zusammenfassung

Beispiel: Backenzähne von Hipparions

Die Daten

77 Backenzähne

Die Daten

77 Backenzähne

gefunden in den Chiwondo Beds, Malawi,

Die Daten

77 Backenzähne

gefunden in den Chiwondo Beds, Malawi,

jetzt in den Sammlungen des
Hessischen Landesmuseums, Darmstadt

Egypt
Saudi Arabia
Riyadh
Qatar
United Arab Emirates
Oman
Niger
Chad
al-Sūdān
Khartoum
Eritrea
Asmara
San'a'
al-Yaman
Niamey
N'Djamena
Djibouti
Ethiopia
Benin
Togo
Ghana
Nigeria
Addis Ababa
Somalia
Lomé
Accra
Central African Republic
Cameroon
Bangui
Malabo
Yaoundé
Equatorial Guinea
São Tomé and Príncipe
Gabon
Uganda
Kampala
Kenya
Muqdisho
Nairobi
Rwanda
Burundi
Tanzania
Brazzaville
Democratic Republic of the Congo
Seychelles
Dar es Salaam
Luanda
Malawi
Glorioso Islands
Comoros
Angola
Zambia
Lilongwe
Lusaka
Tromelin Island
Harare
Madagascar
Zimbabwe
Mozambique
Mauritius
Réunion
Bassas da India
Windhoek
Botswana
Namibia
Gaborone
Pretoria
Maputo
Swaziland
South Africa
Lesotho
Cape Town

Zuordnung

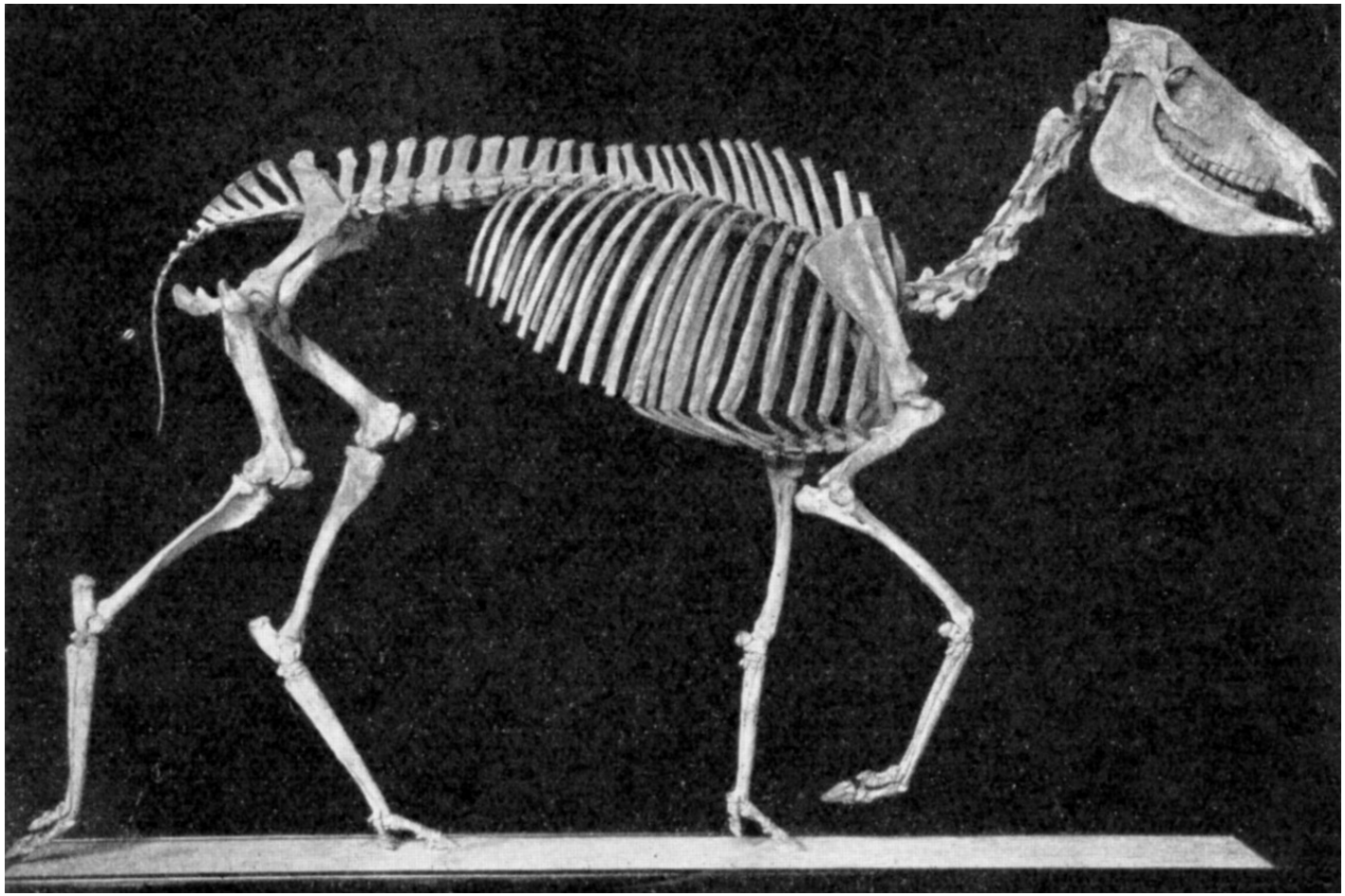
Die Zähne wurden zwei Arten zugeordnet:

Hipparion africanum

$\approx$ 4 Mio. Jahre

Hipparion libycum

$\approx$ 2,5 Mio. Jahre



Geologischer Hintergrund

Vor 2,8 Mio. Jahren kühlte sich das Klima weltweit ab.

Geologischer Hintergrund

Vor 2,8 Mio. Jahren kühlte sich das Klima weltweit ab.

Das Klima in Ostafrika:

warm-feucht $\longrightarrow$ kühl-trocken

Geologischer Hintergrund

Vor 2,8 Mio. Jahren kühlte sich das Klima weltweit ab.

Das Klima in Ostafrika:

warm-feucht $\longrightarrow$ kühl-trocken

Hipparion:

Laubfresser $\longrightarrow$ Grasfresser

Frage

Hipparion:

Laubfresser $\longrightarrow$ Grasfresser

Frage

Hipparion:

Laubfresser $\longrightarrow$ Grasfresser

andere Nahrung $\longrightarrow$ andere Zähne?

Frage

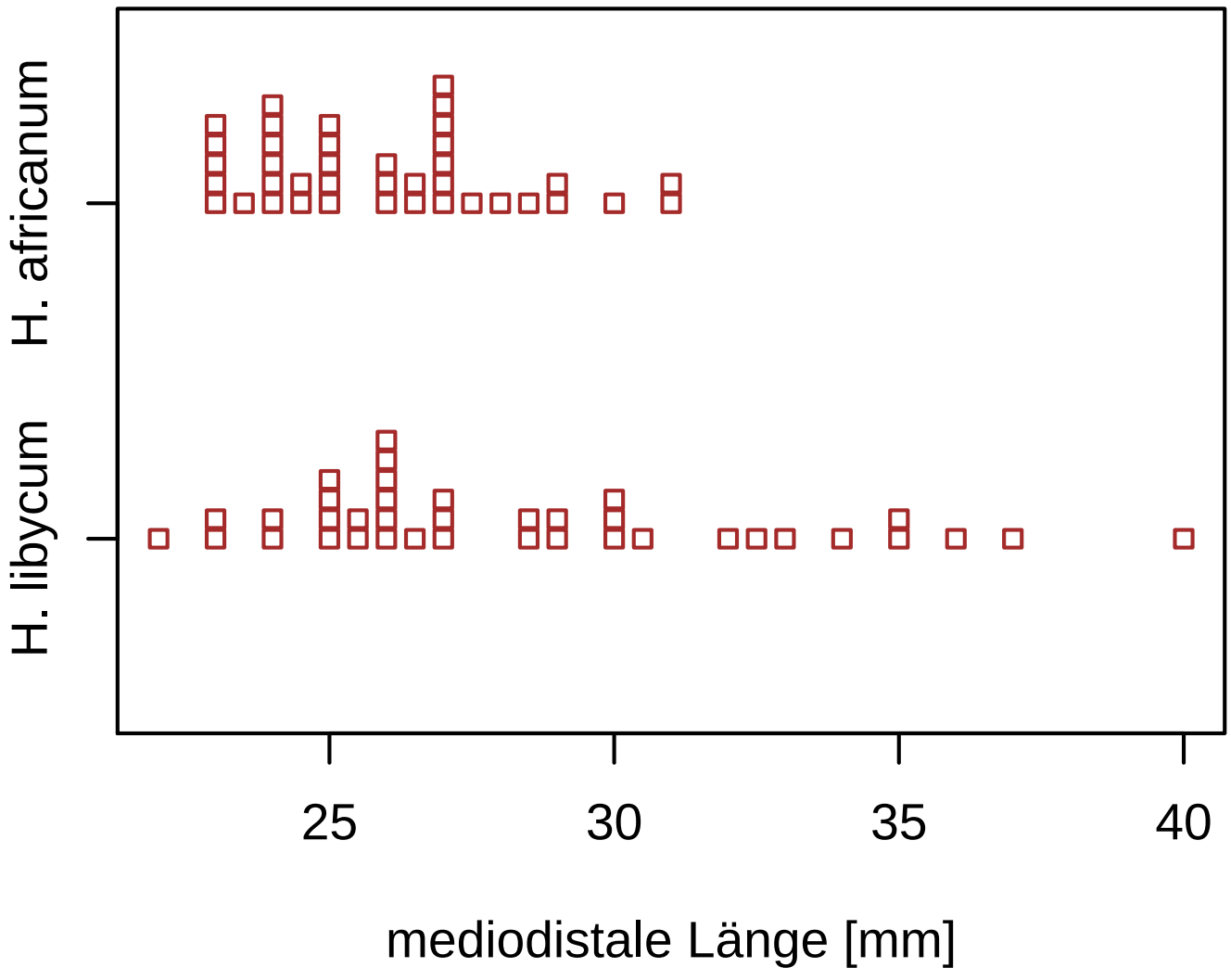
Hipparion:

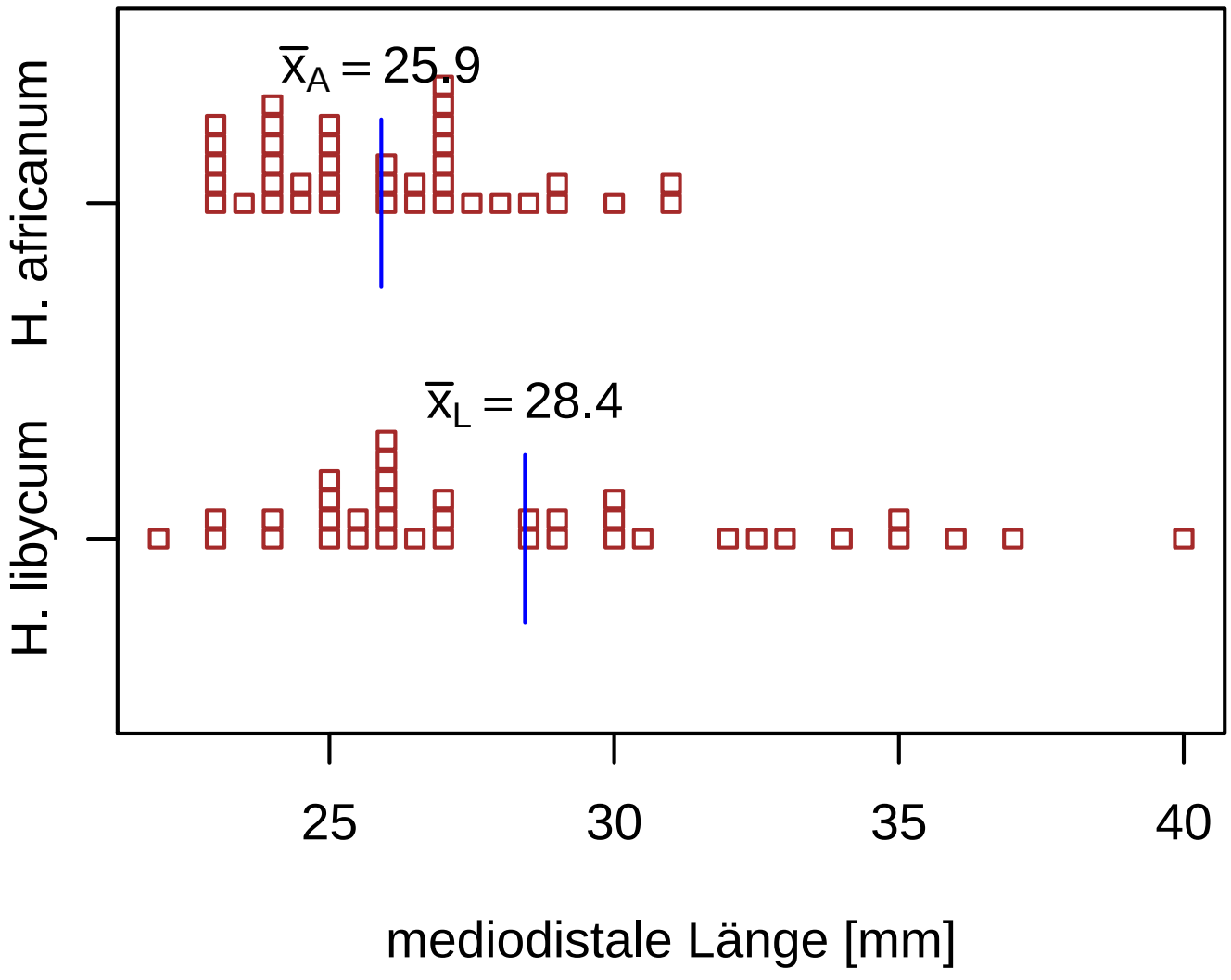
Laubfresser $\longrightarrow$ Grasfresser

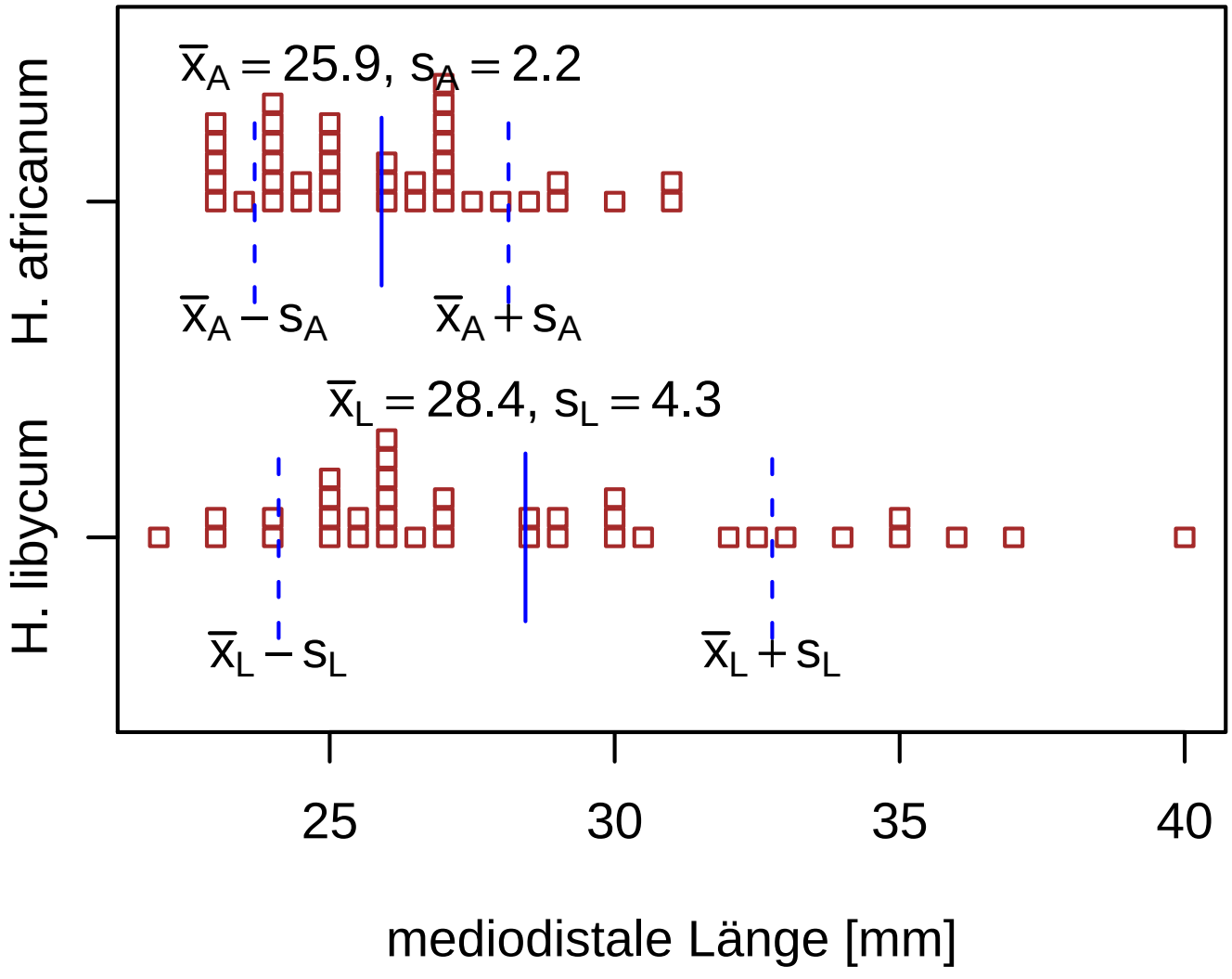
andere Nahrung $\longrightarrow$ andere Zähne?

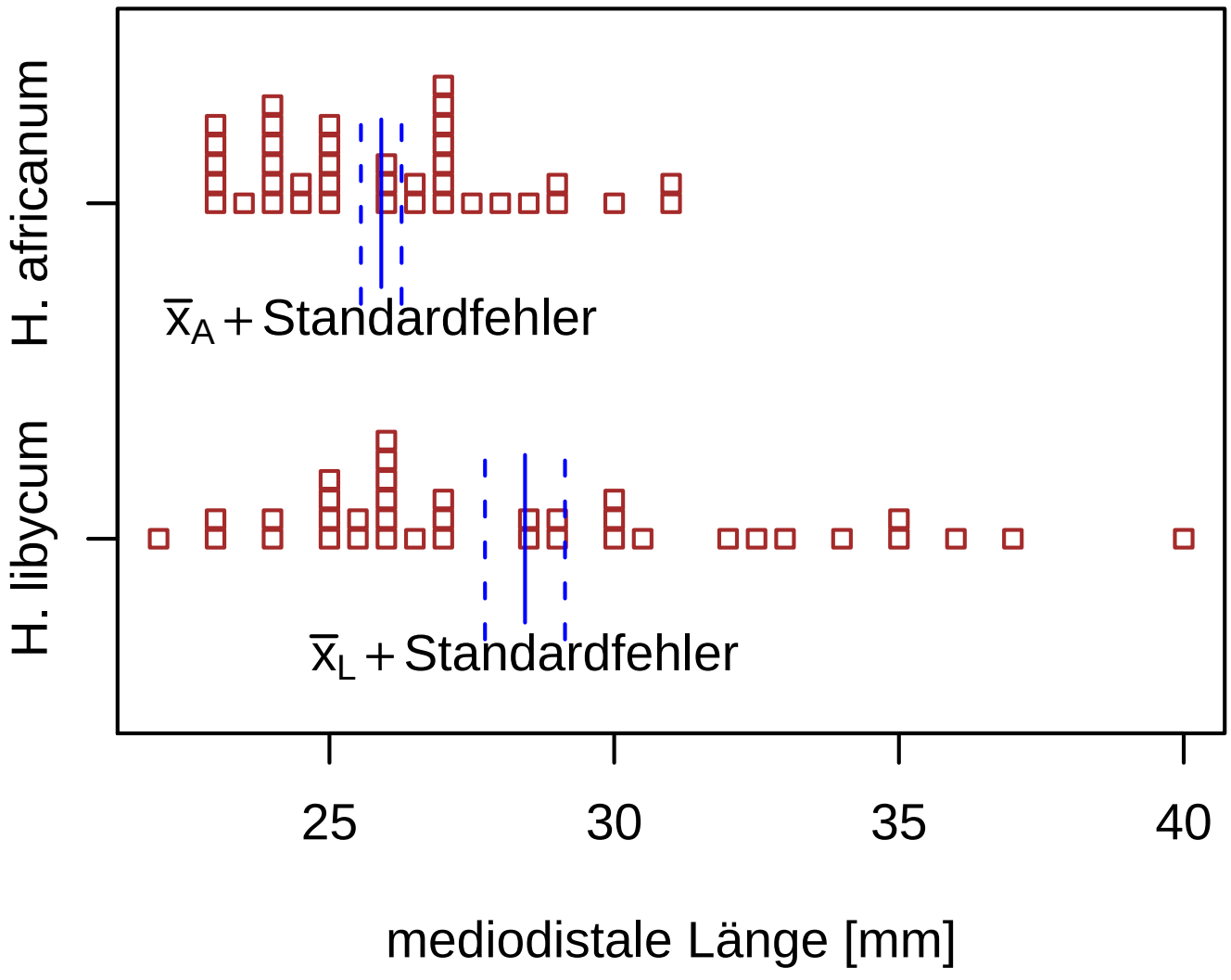
Messungen: mesiodistale Länge

distal = von der Mittellinie weg


H. africanum
H. libycum
25
30
35
40
mediodistale Länge [mm]


$\bar{x}_A = 25.9$
$\bar{x}_L = 28.4$
H. africanum
H. libycum
25
30
35
40
mediodistale Länge [mm]


$\bar{x}_A = 25.9$, $s_A = 2.2$
$\bar{x}_A - s_A$
$\bar{x}_A + s_A$
$\bar{x}_L = 28.4$, $s_L = 4.3$
$\bar{x}_L - s_L$
$\bar{x}_L + s_L$
H. africanum
H. libycum
25
30
35
40
mediodistale Länge [mm]


H. africanum
H. libycum
$\bar{x}_A$ + Standardfehler
$\bar{x}_L$ + Standardfehler
25
30
35
40
mediodistale Länge [mm]

Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$\overline{x}_A = 25{,}9$, $s_A = 2{,}2$,

Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$\overline{x}_A = 25{,}9$, $s_A = 2{,}2$, unser Schätzwert für die Streung von $\overline{x}_A$ ist also $f_A = s_A = 2{,}2/\sqrt{n_A} = 0{,}36$ (Standardfehler)

Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$\overline{x}_A = 25{,}9$, $s_A = 2{,}2$, unser Schätzwert für die Streung von $\overline{x}_A$ ist also $f_A = s_A = 2{,}2/\sqrt{n_A} = 0{,}36$ (Standardfehler),

$\overline{x}_L = 28{,}4$, $s_L = 4{,}3$,

Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$\overline{x}_A = 25{,}9$, $s_A = 2{,}2$, unser Schätzwert für die Streung von $\overline{x}_A$ ist also $f_A = s_A = 2{,}2/\sqrt{n_A} = 0{,}36$ (Standardfehler),

$\overline{x}_L = 28{,}4$, $s_L = 4{,}3$, unser Schätzwert für die Streung von $\overline{x}_L$ ist also $f_L = s_L = 2{,}2/\sqrt{n_L} = 0{,}70$.

Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$\overline{x}_A = 25{,}9$, $s_A = 2{,}2$, unser Schätzwert für die Streung von $\overline{x}_A$ ist also $f_A = s_A = 2{,}2/\sqrt{n_A} = 0{,}36$ (Standardfehler),

$\overline{x}_L = 28{,}4$, $s_L = 4{,}3$, unser Schätzwert für die Streung von $\overline{x}_L$ ist also $f_L = s_L = 2{,}2/\sqrt{n_L} = 0{,}70$.

Ist die beobachtete Abweichung $\overline{x}_L - \overline{x}_A = 2{,}5$ mit der Nullhypothese verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

t-Statistik

Ist die beobachtete Abweichung $\overline{x}_L - \overline{x}_A = 2{,}5$ mit der Nullhypothese verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

t-Statistik

Ist die beobachtete Abweichung $\overline{x}_L - \overline{x}_A = 2{,}5$ mit der Nullhypothese verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

Wir schätzen die Streuung von $\overline{x}_L - \overline{x}_A$ durch f, wo

$$f^2 = f_L^2 + f_A^2$$

t-Statistik

Ist die beobachtete Abweichung $\overline{x}_L - \overline{x}_A = 2{,}5$ mit der Nullhypothese verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

Wir schätzen die Streuung von $\overline{x}_L - \overline{x}_A$ durch f, wo

$$f^2 = f_L^2 + f_A^2$$

und bilden $t = \dfrac{\overline{x}_L - \overline{x}_A}{f}$.

t-Statistik

Ist die beobachtete Abweichung $\overline{x}_L - \overline{x}_A = 2{,}5$ mit der Nullhypothese verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

Wir schätzen die Streuung von $\overline{x}_L - \overline{x}_A$ durch f, wo

$$f^2 = f_L^2 + f_A^2$$

und bilden $t = \dfrac{\overline{x}_L - \overline{x}_A}{f}$.

Wenn die Nullhypothese zutrifft, ist t (approximativ) Student-verteilt mit g Freiheitsgraden

(wobei g aus den Daten geschätzt wird.)

Zwei-Stichproben-*t*-Test mit R

```
> A <- md[Art=="africanum"]
> L<- md[Art=="libycum"]
> t.test(L,A)

Welch Two Sample t-test

data:  L and A
t = 3.2043, df = 54.975, p-value = 0.002255
alternative hypothesis: true difference in means
is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.9453745 4.1025338
sample estimates:
mean of x mean of y
 28.43421  25.91026
```

Formulierung:

„Die mittlere mesiodistale Länge
war signifikant größer (28,4 mm) bei *H. libycum*
als bei *H. africanum* (25,9 mm)
(t-Test, $p = 0{,}002$).“

Wir haben keine Annahme an die Varianzen der beiden Stichproben gemacht. Es gibt auch eine Variante des t-Tests mit der zusätzlichen Annahme $\sigma_A^2 = \sigma_L^2$:

```
> t.test(L,A,var.equal=TRUE)

Two Sample t-test

data:  L and A
t = 3.2289, df = 75, p-value = 0.001845
alternative hypothesis: true difference in means
is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.9667634 4.0811448
sample estimates:
mean of x mean of y
 28.43421  25.91026
```

Inhalt

1. Wiederholung: Ein-Stichproben-t-Test
2. t-Test für ungepaarte Stichproben
   - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
3. Wilcoxons Rangsummentest
   - Motivation
   - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
4. Zusammenfassung

Inhalt

1. Wiederholung: Ein-Stichproben-t-Test
2. t-Test für ungepaarte Stichproben
   - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
3. Wilcoxons Rangsummentest
   - Motivation
   - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
4. Zusammenfassung

Bei (ungefähr) glockenförmigen und symmetrischen verteilten Beobachtungen

(oder wenn die Stichprobenumfänge genügend groß sind)

können wir den t-Test benutzen, um die Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2$ zu testen:

Die t-Statistik ist (annährend) Student-verteilt.

Bei (ungefähr) glockenförmigen und symmetrischen verteilten Beobachtungen

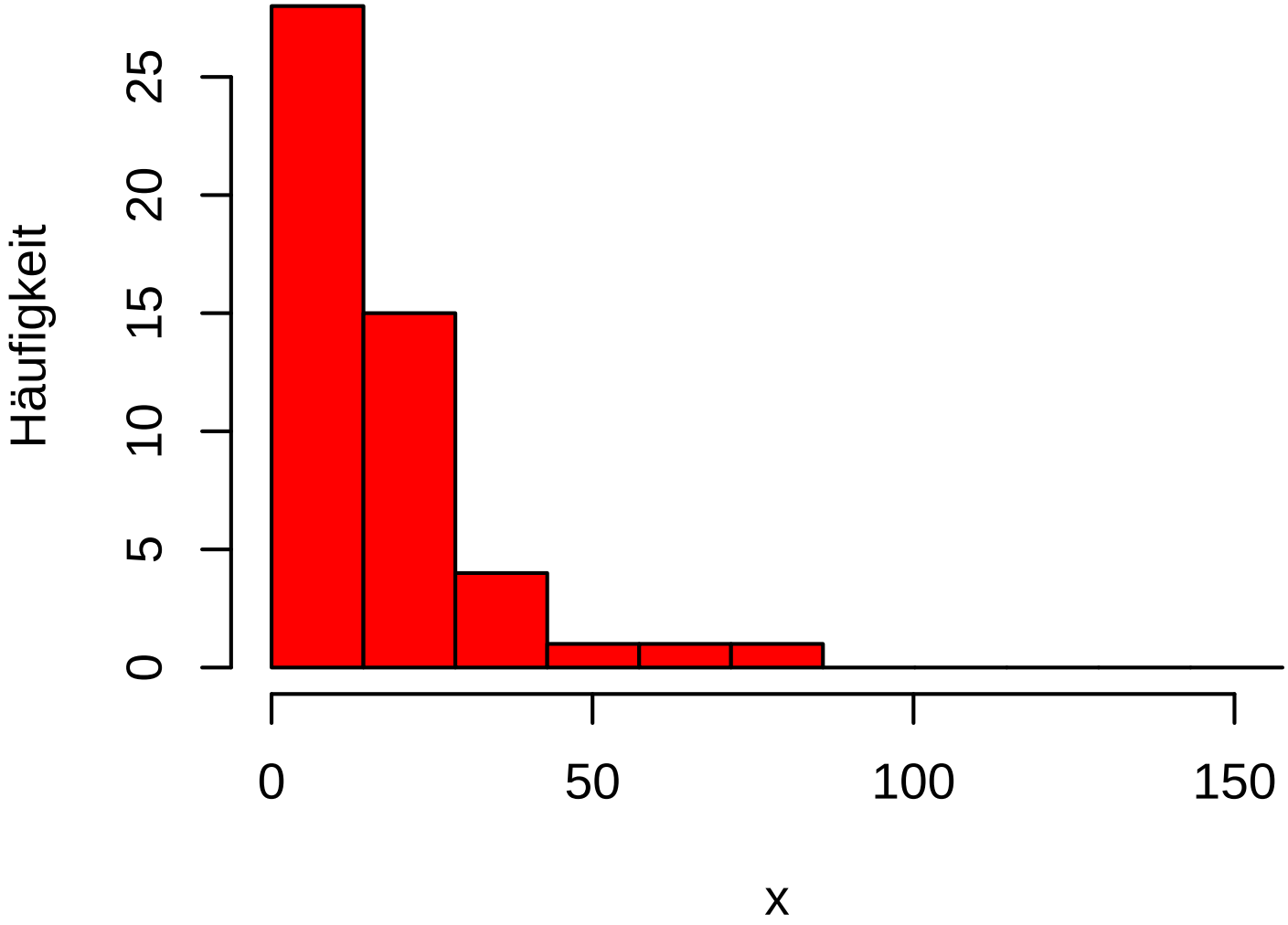
(oder wenn die Stichprobenumfänge genügend groß sind)

können wir den t-Test benutzen, um die Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2$ zu testen:

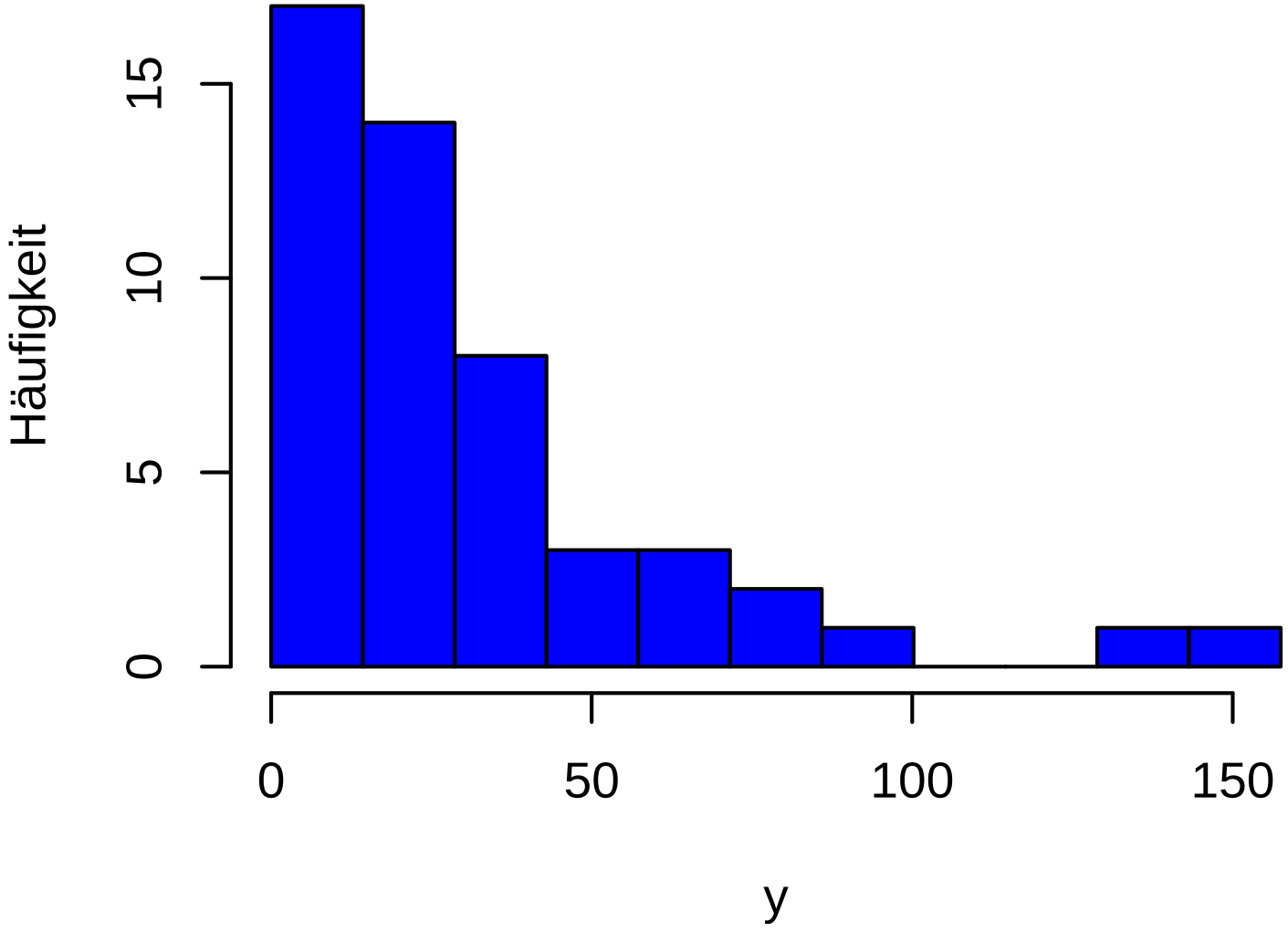
Die t-Statistik ist (annährend) Student-verteilt.

Besonders bei sehr asymmetrischen und langschwänzigen Verteilungen kann das anders sein

Nehmen wir an, wir sollten folgende Verteilungen vergleichen:



Nehmen wir an, wir sollten folgende Verteilungen vergleichen:



Beispiele

Beispiele

- Wartezeiten

Beispiele

- Wartezeiten
- Ausbreitungsentfernungen

Beispiele

- Wartezeiten
- Ausbreitungsentfernungen
- Zelltypenhäufigkeiten

Beispiele

- Wartezeiten
- Ausbreitungsentfernungen
- Zelltypenhäufigkeiten

Gesucht: ein„verteilungsfreier“ Test

Inhalt

1. Wiederholung: Ein-Stichproben-t-Test
2. t-Test für ungepaarte Stichproben
   - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
3. Wilcoxons Rangsummentest
   - Motivation
   - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
4. Zusammenfassung

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Wir möchten die Nullhypothese:
X und Y aus derselben Population testen.

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Wir möchten die Nullhypothese:
X und Y aus derselben Population testen.

Alternative:
X „typischerweise größer“ als Y
oder Y „typischerweise größer“ als X

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$$

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X-Werte unter allen $m + n$ Beobachtungen.

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X-Werte unter allen $m + n$ Beobachtungen.
- Wenn die Nullhypothese zutrifft, sind die m X-Ränge eine rein zufällige Wahl aus $\{1, 2, \ldots, m + n\}$.

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \ldots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$$

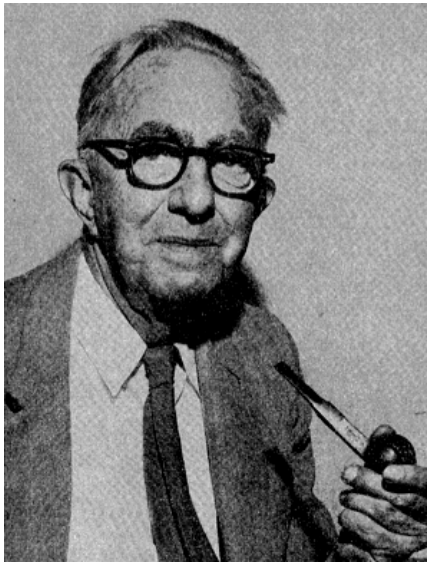
- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X-Werte unter allen $m + n$ Beobachtungen.
- Wenn die Nullhypothese zutrifft, sind die m X-Ränge eine rein zufällige Wahl aus $\{1, 2, \ldots, m + n\}$.
- Berechne die Summe der X-Ränge, prüfe, ob dieser Wert untypisch groß oder klein.

Wilcoxons Rangsummenstatistik

Beobachtungen:

$X : x_1, x_2, \ldots, x_m$

$Y : y_1, y_2, \ldots, y_n$



Frank Wilcoxon,
1892-1965

$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \cdots + m)$

heißt

Wilcoxons Rangsummenstatistik

Wilcoxons Rangsummenstatistik

Bemerkung:

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \cdots + m)$$

Wir könnten auch die Summe der Y-Ränge benutzen,

Wilcoxons Rangsummenstatistik

Bemerkung:

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \cdots + m)$$

Wir könnten auch die Summe der Y-Ränge benutzen, denn

$$\begin{aligned} &\text{Summe der } X\text{-Ränge} + \text{Summe der } Y\text{-Ränge} \\ = \;& \text{Summe aller Ränge} \\ = \;& 1 + 2 + \cdots + (m+n) = \frac{(m+n)(m+n+1)}{2} \end{aligned}$$

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

$$X : 1{,}5,\ 5{,}6,\ 35{,}2$$
$$Y : 7{,}9,\ 38{,}1,\ 41{,}0,\ 56{,}7,\ 112{,}1,\ 197{,}4,\ 381{,}8$$

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

$$X : 1{,}5,\ 5{,}6,\ 35{,}2$$
$$Y : 7{,}9,\ 38{,}1,\ 41{,}0,\ 56{,}7,\ 112{,}1,\ 197{,}4,\ 381{,}8$$

- Lege Beobachtungen zusammen und sortiere:
  $1{,}5,\ 5{,}6,\ 7{,}9,\ 35{,}2,\ 38{,}1,\ 41{,}0,\ 56{,}7,\ 112{,}1,\ 197{,}4,\ 381{,}8$

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

$$X : 1{,}5,\ 5{,}6,\ 35{,}2$$
$$Y : 7{,}9,\ 38{,}1,\ 41{,}0,\ 56{,}7,\ 112{,}1,\ 197{,}4,\ 381{,}8$$

- Lege Beobachtungen zusammen und sortiere:
  $1{,}5,\ 5{,}6,\ 7{,}9,\ 35{,}2,\ 38{,}1,\ 41{,}0,\ 56{,}7,\ 112{,}1,\ 197{,}4,\ 381{,}8$
- Bestimme Ränge:
  $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

$$X : 1{,}5,\ 5{,}6,\ 35{,}2$$
$$Y : 7{,}9,\ 38{,}1,\ 41{,}0,\ 56{,}7,\ 112{,}1,\ 197{,}4,\ 381{,}8$$

- Lege Beobachtungen zusammen und sortiere:
  $1{,}5,\ 5{,}6,\ 7{,}9,\ 35{,}2,\ 38{,}1,\ 41{,}0,\ 56{,}7,\ 112{,}1,\ 197{,}4,\ 381{,}8$
- Bestimme Ränge:
  $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$
- Rangsumme: $W = 1 + 2 + 4 - (1 + 2 + 3) = 1$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

X-Population größer $\Longrightarrow$ W groß:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

X-Population größer $\Longrightarrow$ W groß:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 21$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

X-Population größer $\Longrightarrow$ W groß:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 21$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

X-Population größer $\Longrightarrow$ W groß:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 21$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 20$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

X-Population größer $\Longrightarrow$ W groß:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 21$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 20$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

X-Population größer $\Longrightarrow$ W groß:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 21$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 20$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 20$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

X-Population größer $\Longrightarrow$ W groß:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 21$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 20$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 20$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\Longrightarrow$ W klein:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 0$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 1$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 2$

X-Population größer $\Longrightarrow$ W groß:

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 21$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 20$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 20$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \quad W = 19$

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X-Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X-Stichprobe
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und *Y*-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der *X*-Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

sein können.

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X-Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

sein können.

Es gibt $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ Möglichkeiten.

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

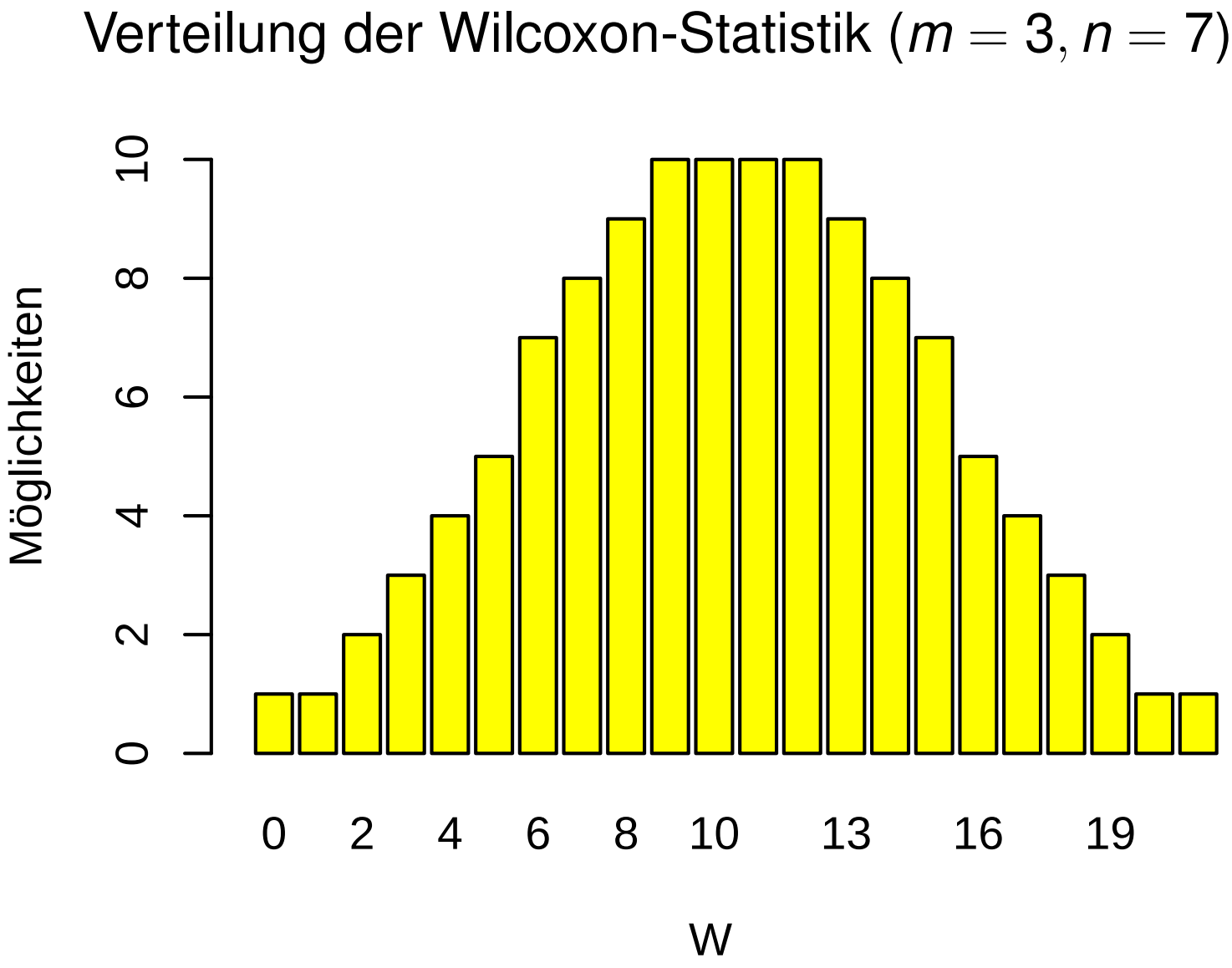
Die 3 Ränge der X-Stichprobe
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

sein können.

Es gibt $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ Möglichkeiten.

(Allgemein: $\frac{(m+n)(m+n-1)\cdots(n+1)}{m(m-1)\cdots 1}) = \frac{(m+n)!}{n!m!} = \binom{m+n}{m}$ Möglichkeiten)


Verteilung der Wilcoxon-Statistik ($m = 3, n = 7$)
Möglichkeiten
0
2
4
6
8
10
0
2
4
6
8
10
13
16
19
W

Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich wahrscheinlich, also

$$\mathbb{P}(W = w) = \frac{\text{Anz. Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}$$

Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich wahrscheinlich, also

$$\mathbb{P}(W = w) = \frac{\text{Anz. Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}$$

Wir beobachten in unserem Beispiel:

1,5, 5,6, 7,9, 35,2, 38,1, 41,0, 56,7, 112,1, 197,4, 381,8

$$W = 1$$

Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich wahrscheinlich, also

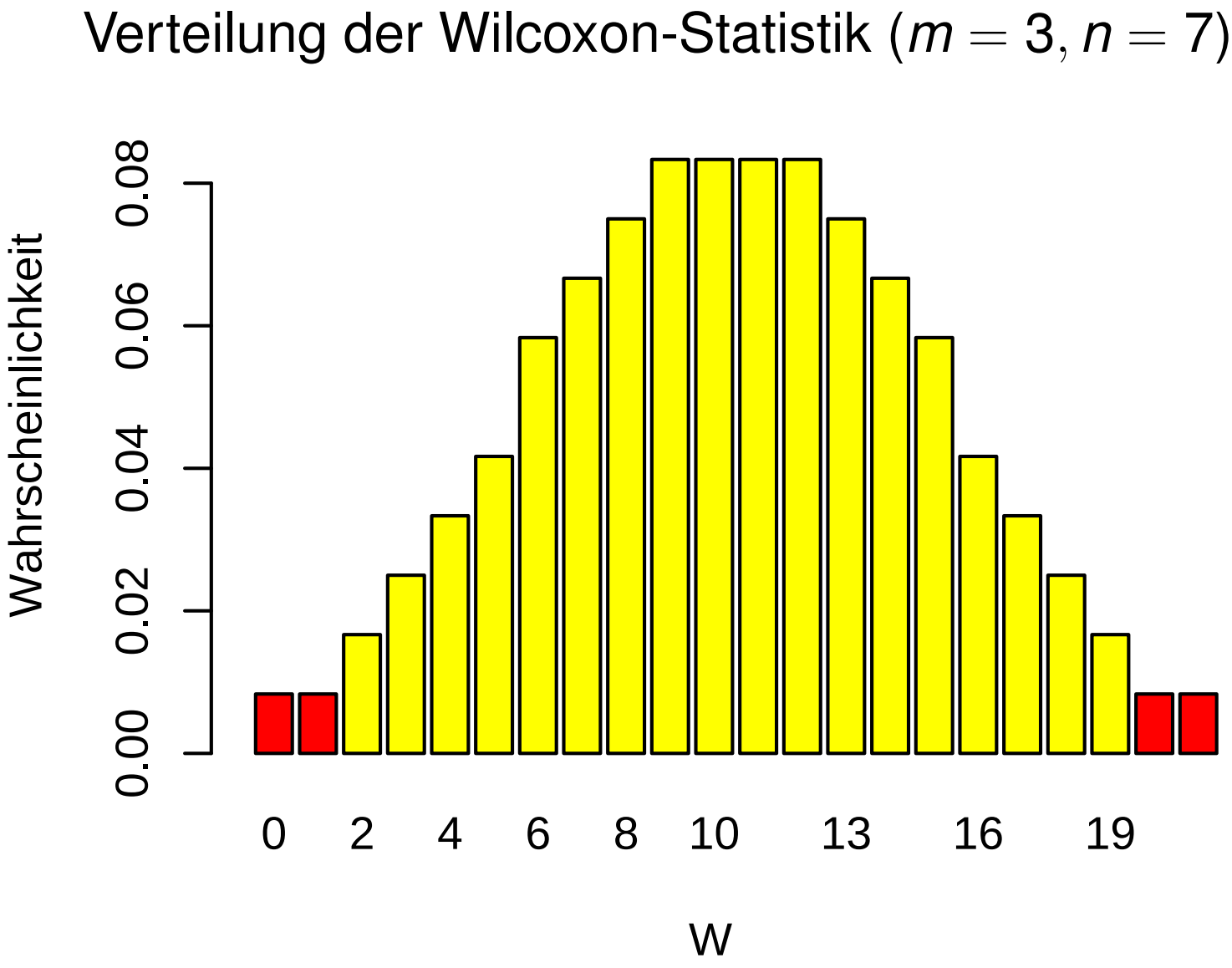
$$\mathbb{P}(W = w) = \frac{\text{Anz. Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}$$

Wir beobachten in unserem Beispiel:

1,5, 5,6, 7,9, 35,2, 38,1, 41,0, 56,7, 112,1, 197,4, 381,8

$$W = 1$$

$$\mathbb{P}(W \leq 1) + \mathbb{P}(W \geq 20)$$
$$= \mathbb{P}(W = 0) + \mathbb{P}(W = 1) + \mathbb{P}(W = 20) + \mathbb{P}(W = 21)$$
$$= \frac{1+1+1+1}{120} \doteq 0{,}033$$


Verteilung der Wilcoxon-Statistik ($m = 3, n = 7$)
Wahrscheinlichkeit
0.00
0.02
0.04
0.06
0.08
0
2
4
6
8
10
13
16
19
W

Für unser Beispiel ($W = 1$) also:

$$p\text{-Wert} =$$
$$\mathbb{P}(\text{ein so extremes } W) = 4/120 = 0{,}033$$

Für unser Beispiel ($W = 1$) also:

$$p\text{-Wert} = \mathbb{P}(\text{ein so extremes } W) = 4/120 = 0{,}033$$

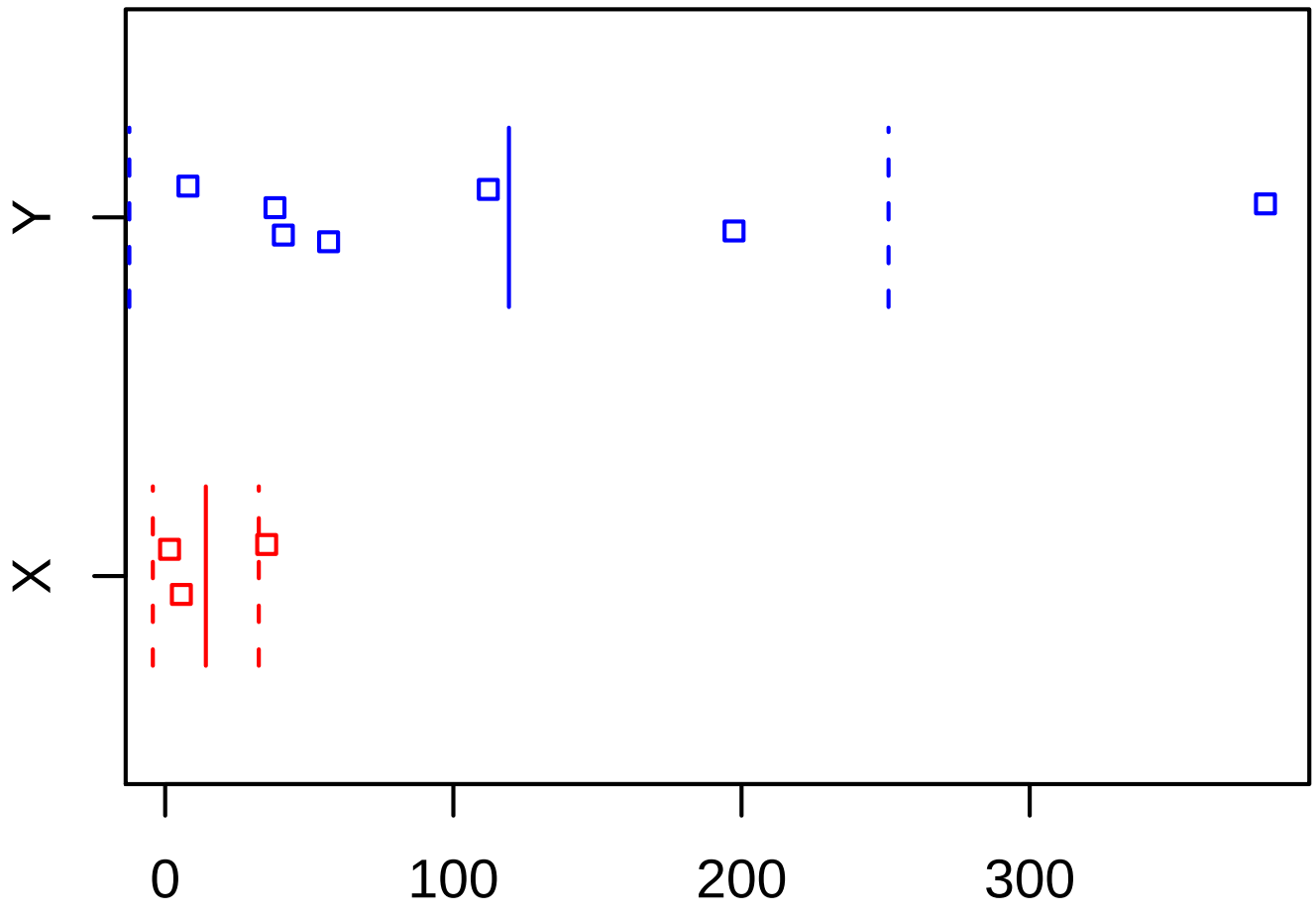
Wir lehnen die Nullhypothese,
dass die Verteilungen
von X und Y
identisch sind,
auf dem 5%-Niveau ab.

R kennt den Wilcoxon-Test mittels `wilcox.test`:

```
> x
[1]  1.5  5.6 35.2
> y
[1]   7.9  38.1  41.0  56.7 112.1 197.4 381.8
> wilcox.test(x,y)

Wilcoxon rank sum test

data:  x and y
W = 1, p-value = 0.03333
alternative hypothesis: true location shift is
not equal to 0
```

Verleichen wir (spaßeshalber) mit dem *t*-Test:

```
> x
[1]  1.5  5.6 35.2
> y
[1]   7.9  38.1  41.0  56.7 112.1 197.4 381.8
> t.test(x,y)

Welch Two Sample t-test

data:  x and y
t = -2.0662, df = 6.518, p-value = 0.08061
alternative hypothesis: true difference in means is not e
95 percent confidence interval:
 -227.39182   17.02039
sample estimates:
mean of x mean of y
  14.1000  119.2857
```


Y
X
0
100
200
300

Inhalt

1 Wiederholung: Ein-Stichproben-t-Test

2 t-Test für ungepaarte Stichproben
- Beispiel: Backenzähne von Hipparions

3 Wilcoxons Rangsummentest
- Motivation
- Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben

4 Zusammenfassung

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir ziehen Stichproben aus den Populationen
mit Mittelwerten

$\overline{x}_1$ $\overline{x}_2$

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir ziehen Stichproben aus den Populationen
mit Mittelwerten

$\overline{x}_1 \quad \overline{x}_2$

Um die Nullhypothese H_0 zu prüfen, bilden wir die t-Statistik

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{f} \quad \text{mit} \quad f^2 = \left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2$$

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir ziehen Stichproben aus den Populationen
mit Mittelwerten
$\overline{x}_1 \quad \overline{x}_2$

Um die Nullhypothese H_0 zu prüfen, bilden wir die t-Statistik

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{f} \quad \text{mit} \quad f^2 = \left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2$$

p-Wert unter H_0: $p \approx \mathbb{P}(|T_g| \geq |t|)$

(g=(geschätzte) Anz. Freiheitsgrade, hängt von n_1, n_2, s_1, s_2 ab)

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir ziehen Stichproben aus den Populationen
mit Mittelwerten
$\overline{x}_1 \quad \overline{x}_2$

Um die Nullhypothese H_0 zu prüfen, bilden wir die t-Statistik

$$t = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{f} \quad \text{mit} \quad f^2 = \left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}}\right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}}\right)^2$$

p-Wert unter H_0: $p \approx \mathbb{P}(|T_g| \geq |t|)$

(g=(geschätzte) Anz. Freiheitsgrade, hängt von n_1, n_2, s_1, s_2 ab)

Wenn die Verteilungen nicht annähernd normal sind, können wir stattdessen die Wilcoxon-Rangsummenstatistik verwenden.