

1. Aufgabe (Berechnung von Erwartungswerten) Sei X eine Zufallsvariable mit möglichen Werten in $\{1, 2, 3\}$ und Verteilung

$$\Pr(X = 1) = \frac{1}{2} \quad \Pr(X = 2) = \frac{1}{3} \quad \Pr(X = 3) = \frac{1}{6}$$

Berechnen Sie per Hand

- (a) den Erwartungswert $\mathbb{E}X$ von X (Ergebnis: $\frac{5}{3}$),
- (b) $\mathbb{E}(X^2)$,
- (c) die Varianz $\text{Var}(X)$ von X ,
- (d) $\mathbb{E}(X^2 + X)$, und
- (e) $\mathbb{E}[(X + 1)^2]$.

(Hinweis: Verwenden Sie dazu die Definition des Erwartungswerts und/oder Linearität.)

2. Aufgabe Sei X die Zufallsvariable mit Werten in $\{1, 2, 3\}$ und Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\{0, 1\}$. Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) sei

$$\begin{aligned}\Pr(X = 1, Y = 0) &= \frac{1}{2} & \Pr(X = 1, Y = 1) &= 0 \\ \Pr(X = 2, Y = 0) &= \frac{1}{6} & \Pr(X = 2, Y = 1) &= \frac{1}{6} \\ \Pr(X = 3, Y = 0) &= \frac{1}{12} & \Pr(X = 3, Y = 1) &= \frac{1}{12}\end{aligned}$$

Berechnen Sie per Hand

- (a) $\Pr(Y = 0)$ und $\Pr(Y = 1)$,
- (b) den Erwartungswert $\mathbb{E}Y$ von Y ,
- (c) $\mathbb{E}(Y^2)$,
- (d) die Standardabweichung $\sqrt{\text{Var}(Y)}$ von Y ,
- (e) die Kovarianz $\text{Cov}(X, Y)$ von X und Y , und
- (f) die Korrelation $\text{Cor}(X, Y)$ zwischen X und Y .

3. Aufgabe Ein Skatblatt (32 Karten) wird gut gemischt, und anschließend werden die obersten beiden Karten nacheinander aufgedeckt. Welche Paare der folgenden Ereignisse sind stochastisch unabhängig?

A Die erste Karte ist ein Ass.

D Die zweite Karte ist eine Dame.

P Die erste Karte ist ein Pik (\spadesuit).

H Die zweite Karte ist ein Herz (\heartsuit).

Ändert sich daran etwas, und ggf. was, wenn der König der Farbe Kreuz (\clubsuit) fehlt, und es somit nur 31 Karten sind?

4. Aufgabe Pflanzen einer bestimmten Art erreichen an einem bestimmten Standort nach vier Monaten eine Wuchshöhe von durchschnittlich 123 cm. Die Wuchshöhe hängt aber auch von den Bedingungen innerhalb der vier Monate ab, insbesondere der Regenmenge R und der Sonneneinstrahlung S , die in bestimmten Einheiten gemessen werden. R und S unterscheiden sich an dem Standort natürlich zwischen den Jahren, und die Standardabweichungen betragen $\sigma_R = 4.3$ und $\sigma_S = 7.5$. Da es etwas seltener sonnig ist, wenn es mehr regnet, gilt $\text{Cor}(R, S) = -0.1$. Mit einer Erhöhung von R oder S vergrößern die Pflanzenhöhe um 1.2 bzw. 0.8 cm pro Einheit. Allerdings ist aufgrund anderer Umwelteinflüsse und genetischer Faktoren ein zufällig variierender Wert V auf die Wuchshöhe zu addieren, der eine Standardabweichung von 6.7 cm aufweist und nicht mit R oder S korreliert ist. Berechnen Sie die sich insgesamt ergebende Standardabweichung in der Wuchshöhe der Pflanzen.

5. Aufgabe Jemand behauptet Ihnen gegenüber, dass es reiner Zufall ist, ob man (bei der Geburt) ein Mädchen oder einen Jungen bekommt. (“Reiner Zufall” heißt, dass die Wahrscheinlichkeiten gleich, also beide $1/2$ sind.) Entkräften Sie diese Aussage statistisch anhand folgender Daten: Im Klinikum Großhadern kamen letztes Jahr 2148 Babys zur Welt (fiktive Daten). Davon waren 1124 Jungs und 1024 Mädchen. Achten Sie auch auf eine korrekte Formulierung des Antwortsatzes. Hinweis: Verwenden Sie den z -Test aus der Vorlesung.

6. Aufgabe

- (a) Stellen Sie sich ein einfaches Würfelspiel vor, bei dem Sie immer so viele Felder vorrücken dürfen, wie der Würfel Augen anzeigt. Sei X die Anzahl der Felder, die Sie vorangekommen sind, nachdem Sie zehnmal an der Reihe waren. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung von X . (Gehen Sie davon aus, dass da Spielfeld groß genug ist, so dass Sie nicht an Grenzen stoßen.)
- (b) Lösen Sie diese Aufgabe auch mit folgender Regelvariante: Wenn Sie eine Sechs gewürfelt haben, dürfen Sie ein zweites Mal würfeln und die Summe der beiden Augenzahlen vorrücken. (Falls beim zweiten Wurf wieder eine Sechs kommt, dürfen Sie jedoch nicht noch ein drittes Mal würfeln.)