Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Biologen
Spezielle Verteilungen

Noémie Becker & Dirk Metzler

7. Juni 2013

Inhaltsverzeichnis

1 Binomialverteilung

Binomialverteilung

Sei X die Anzahl der Erfolge bei n unabhängigen Versuchen mit Erfolgswahrscheinlichkeit von jeweils p. Dann gilt für $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$

$$\Pr(X = k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

und X heißt *binomialverteilt*, kurz:

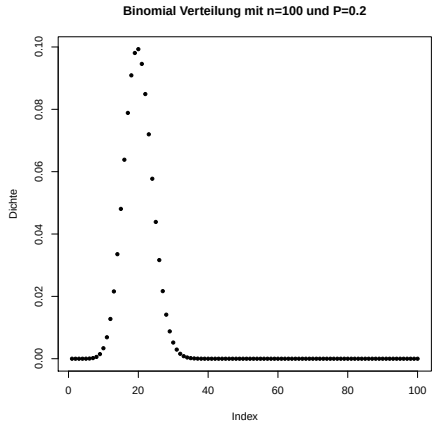
$$X \sim \text{bin}(n, p).$$

Eine Ja/Nein-Zufallsgröße nennt man auch eine Bernoulli-Zufallsgröße.

$$\mathbb{E}X = np$$

$$\text{Var } X = n \cdot p \cdot (1-p)$$

Dichte der Binomialverteilung



Benutzung der Binomialverteilung

Das Problem bei der Binomialverteilung ist: $\binom{n}{k}$ exakt zu berechnen, ist für große n sehr aufwändig. Deshalb:

Die Binomialverteilung wird oft durch andere Verteilungen approximiert.

2 Normalverteilung

Normalverteilung

Eine Zufallsvariable Z mit der Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

heißt *standardnormalverteilt*.

kurz: $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{E}Z = 0$$
$$\text{Var } Z = 1$$

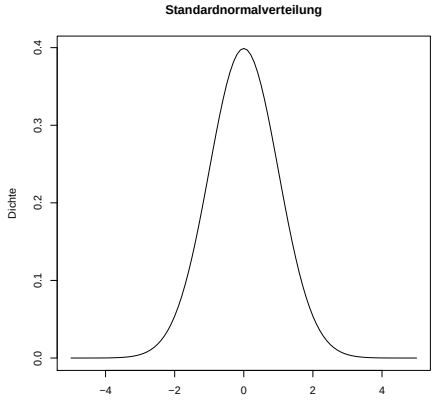
Ist Z $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt, so ist $X = \sigma \cdot Z + \mu$ normalverteilt mit Mittelwert μ und Varianz σ^2, kurz:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

X hat dann die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Dichte der Normalverteilung



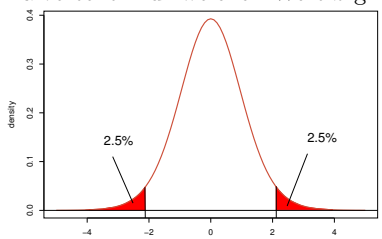
Merkregeln der Normalverteilung

Ist $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, so gilt:

- $\Pr(|Z - \mu| > \sigma) \approx 33\%$
- $\Pr(|Z - \mu| > 1.96 \cdot \sigma) \approx 5\%$
- $\Pr(|Z - \mu| > 3 \cdot \sigma) \approx 0.3\%$

Berechnung von Quantilen

Sei $Z \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$ standardnormalverteilt. Für welchen Wert z gilt $\Pr(|Z| > z) = 5\%$?



Wegen der Symmetrie bzgl der y-Achse gilt

$$\Pr(|Z| > z) = \Pr(Z < -z) + \Pr(Z > z) = 2 \cdot \Pr(Z < -z)$$

Finde also $z > 0$, so dass $\Pr(Z < -z) = 2.5\%$.

```
> qnorm(0.025,mean=0,sd=1)
[1] -1.959964
```
Antwort: $z \approx 1.96$, also knapp 2 Standardabweichungen

Normalapproximation

Für große n und p, die nicht zu nahe bei 0 oder 1 liegen, kann man die Binomialverteilung durch die Normalverteilung mit dem entsprechenden Erwartungswert und der entsprechenden Varianz approximieren:

Ist $X \sim \text{bin}(n,p)$ und $Z \sim \mathcal{N}(\mu = n \cdot p, \sigma^2 = n \cdot p \cdot (1-p))$, so gilt

$$\Pr(X \in [a,b]) \approx \Pr(Z \in [a,b])$$

(eine Faustregel: für den Hausgebrauch meist okay, wenn $n \cdot p \cdot (1-p) \geq 9$)

Zentraler Grenzwertsatz

Eine etwas allgemeinere *Normalapproximation* beschreibt der Zentraler Grenzwertsatz.

Der zentrale Grenzwertsatz besagt, dass die Verteilung von Summen
unabhängiger und identisch verteilter
Zufallsvariablen in etwa die Normalverteilung ist.

Zentraler Grenzwertsatz

Die $\mathbb{R}$-wertigen Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$ seien unabhängig und identisch verteilt mit endlicher Varianz $0 < \text{Var } X_i < \infty$. Sei außerdem

$$Z_n := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$$

die Summe der ersten n Variablen.

Dann ist die zentrierte und reskalierte Summe im Limes $n \to \infty$ standardnormalverteilt, d.h.

$$\frac{Z_n - \mathbb{E}Z_n}{\sqrt{\text{Var } Z_n}} \sim \mathcal{N}(\mu = 0, \sigma^2 = 1)$$

bei $n \to \infty$.

Formal: Es gilt für alle $-\infty \leq a < b \leq \infty$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(a \leq \frac{Z_n - \mathbb{E}Z_n}{\sqrt{\text{Var } Z_n}} \leq b\right) = \Pr(a \leq Z \leq b),$$

wobei Z eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

3 T-Verteilung

T-Verteilung

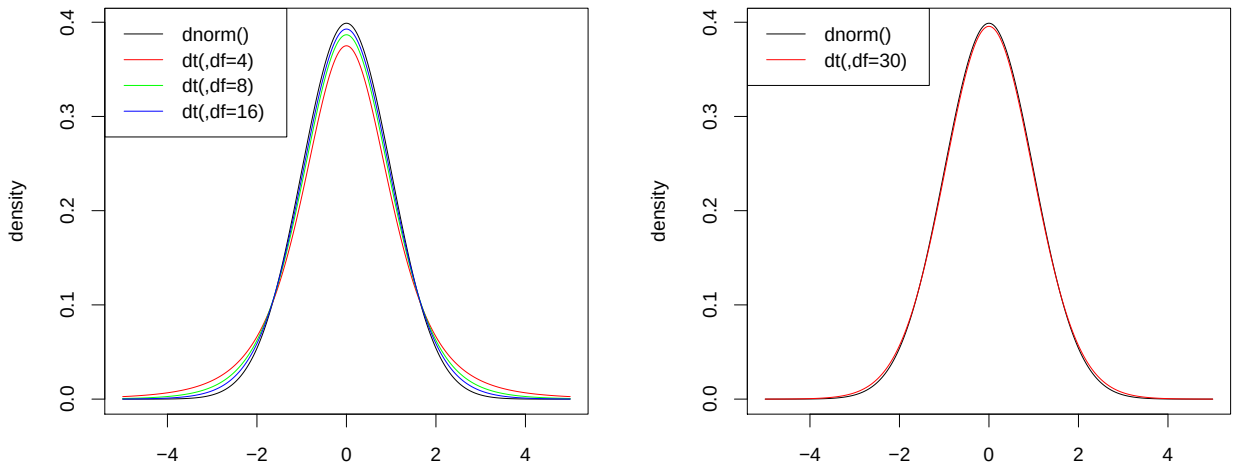
Sind $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig aus einer Normalverteilung mit Mittelwert μ gezogen, so ist

$$\frac{\overline{X} - \mu}{s/\sqrt{n}}$$

t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden (df=*degrees of freedom*). Eine t-verteilte Zufallsvariable bezeichnen wir meist mit T.

Die t-Verteilung heißt auch Student-Verteilung. Die t-Verteilung wurde 1908 von William Gosset veröffentlicht, während Gosset in einer Guinness-Brauerei arbeitete. Da sein Arbeitgeber die Veröffentlichung nicht gestattete, veröffentlichte Gosset sie unter dem Pseudonym *Student*.

Dichte der t-Verteilung



T-Test

Gepaarter t-test

Ein-Stichproben t-test

Zwei-Stichproben t-Test, ungepaart mit gleichen Varianzen

Welch-t-Test, die Varianzen dürfen ungleich sein

T test : Zweiseitig oder einseitig testen?

In den meisten Fällen will man testen, ob zwei Stichproben sich signifikant unterscheiden. ⇝ zweiseitiger Test

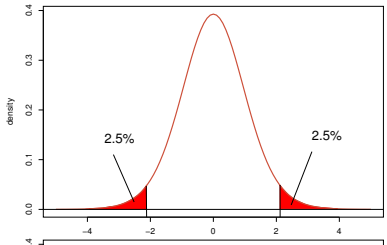
In manchen Fällen

- kann man von vornherein ausschließen, dass die erste Stichprobe kleinere Werte als die zweite Stichprobe hat. Dann will man testen, ob die erste Stichprobe signifikant größer ist.
- will man nur testen, ob die erste Stichprobe signifikant größer ist.
- will man nur testen, ob die erste Stichprobe signifikant kleiner ist.

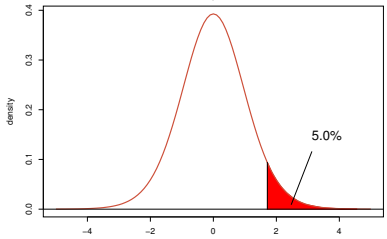
⇝ einseitiger Test

T test : Zweiseitig oder einseitig testen?

Wir beobachten einen Wert x, der deutlich größer als der H_0-Erwartungswert μ ist.



p-Wert=$\Pr_{H_0}(|X - \mu| \geq |x - \mu|)$



p-Wert=$\Pr_{H_0}(X - \mu \geq x - \mu)$

4 Chi-Quadrat-Verteilung

Chi-Quadrat-Verteilung

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen, so ist

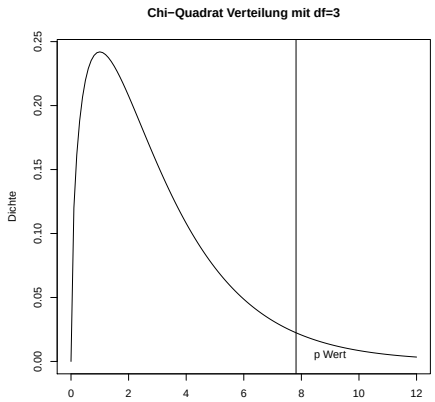
$$Y = \sum_i X_i^2$$

Chi-Quadrat-verteilt mit n Freiheitsgraden.

$$\mathbb{E}Y = n$$

$$\text{Var } Y = 2n$$

Dichte der Normalverteilung



Chi-Quadrat-Test

Gegeben Abweichungen zwischen Daten und eine Verteilung oder zwischen zwei Verteilungen. Wir messen die Abweichungen durch die X^2-Statistic:

$$X^2 = \sum_i \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

wobei E_i = erwartet Anzahl in Klasse i und O_i = beobachtete (engl. *observed*) Anzahl in Klasse i.

Falls die Nullhypothese gilt und die Erwartungswerte E_i nicht zu klein sind (Faustregel: sie sollten alle ≥ 5 sein), ist X^2 *ungefähr* χ^2*-verteilt*. Die χ^2-Verteilung hängt ab von der Anzahl der Freiheitsgrade **df**.

5 F-Verteilung

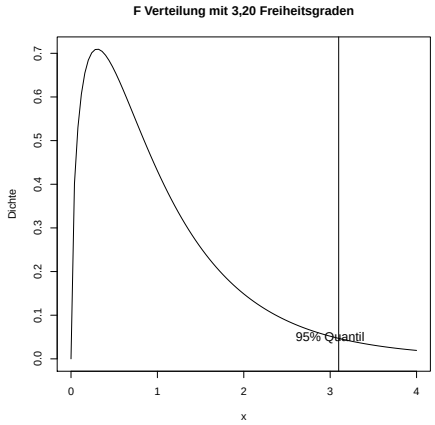
F-Verteilung

Sind X und Y unabhängige χ^2-verteilte Zufallsvariablen mit Freiheitsgraden m für X und n für Y, so ist

$$F = \frac{X/m}{Y/n}$$

F-verteilt mit m und n Freiheitsgraden.

Dichte der F-Verteilung



F-Test

$X_{ij} = j$-te Beobachtung in der i-ten Gruppe, $j = 1, \ldots, n_i$, Modellannahme: $X_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$.
$\mathbb{E}[\varepsilon_{ij}] = 0$, $\mathrm{Var}[\varepsilon_{ij}] = \sigma^2$

$SS_{\text{innerh}} = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \overline{X}_{i\cdot})^2$ Quadratsumme innerhalb d. Gruppen, $n - I$ Freiheitsgrade

$SS_{\text{zw}} = \sum_{i=1}^{I} n_i (\overline{X}_{i\cdot} - \overline{X}_{\cdot\cdot})^2$ Quadratsumme zwischen d. Gruppen, $I - 1$ Freiheitsgrade

$$F = \frac{SS_{\text{zw}}/(I-1)}{SS_{\text{innerh}}/(n-I)}$$

Unter der Hypothese $H_0 : \mu_1 = \cdots = \mu_I$ („alle μ_i sind gleich“) ist F Fisher-verteilt mit $I-1$ und $n-I$ Freiheitsgraden
(unabhängig vom tatsächlichen gemeinsamen Wert der μ_i).

F-Test: Wir lehnen H_0 zum Signifikanzniveau α ab, wenn $F \geq q_\alpha$, wobei q_α das $(1-\alpha)$-Quantil der Fisher-Verteilung mit $I-1$ und $n-I$ Freiheitsgraden ist.