Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Biologen
2. Der Standardfehler

Martin Hutzenthaler & Dirk Metzler

http://evol.bio.lmu.de/_statgen

11. Mai 2010

1. Der Standardfehler
    - Ein Versuch
    - Ein allgemeiner Rahmen
    - Zur Verteilung von $\overline{x}$
    - Anwendungen
    - Zusammenfassung

Inhalt

Inhalt

Hirse

Bild: *Panicum miliaceum*

(copyright expired)

Versuchsaufbau:

14 Hirse-Pflanzen von einer Sorte
wurden 7 Tage lang nicht mehr gegossen
(„trockengestresst“).

Versuchsaufbau:

14 Hirse-Pflanzen von einer Sorte
wurden 7 Tage lang nicht mehr gegossen
(„trockengestresst“).

An den letzten drei Tagen
wurde die Wasserabgabe der Pflanzen
durch Wägung ermittelt
und ein Mittelwert über drei Tage errechnet.

Versuchsaufbau:

14 Hirse-Pflanzen von einer Sorte
wurden 7 Tage lang nicht mehr gegossen
(„trockengestresst“).

An den letzten drei Tagen
wurde die Wasserabgabe der Pflanzen
durch Wägung ermittelt
und ein Mittelwert über drei Tage errechnet.

Zum Schluß des Versuchs
wurden die Pflanzen abgeschnitten
und die Blattfläche bestimmt.

Transpiration srate

=

(Wasserabgabe pro Tag)/Blattfläche

Transpirationsrate

=

(Wasserabgabe pro Tag)/Blattfläche $\left[\frac{\text{ml}}{\text{cm}^2 \cdot \text{Tag}}\right]$

Ein Ziel des Versuchs:
die mittlere Transpirationsrate

(für diese Hirsesorte unter diesen Bedingungen)

zu bestimmen.

Ein Ziel des Versuchs:
die mittlere Transpirationsrate μ

(für diese Hirsesorte unter diesen Bedingungen)

zu bestimmen.

Ein Ziel des Versuchs:
die mittlere Transpirationsrate μ
(für diese Hirsesorte unter diesen Bedingungen)
zu bestimmen.

In einem großen Versuch mit sehr vielen Pflanzen
könnte man μ beliebig genau bestimmen.

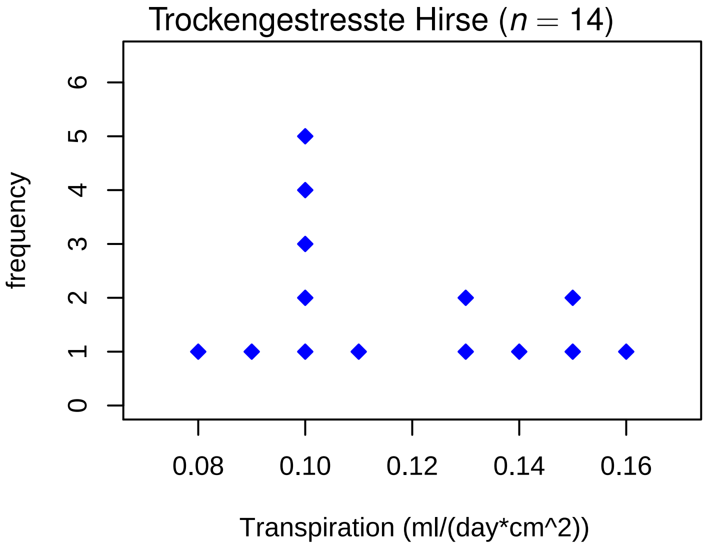
Ein Ziel des Versuchs:
die mittlere Transpirationsrate μ

(für diese Hirsesorte unter diesen Bedingungen)

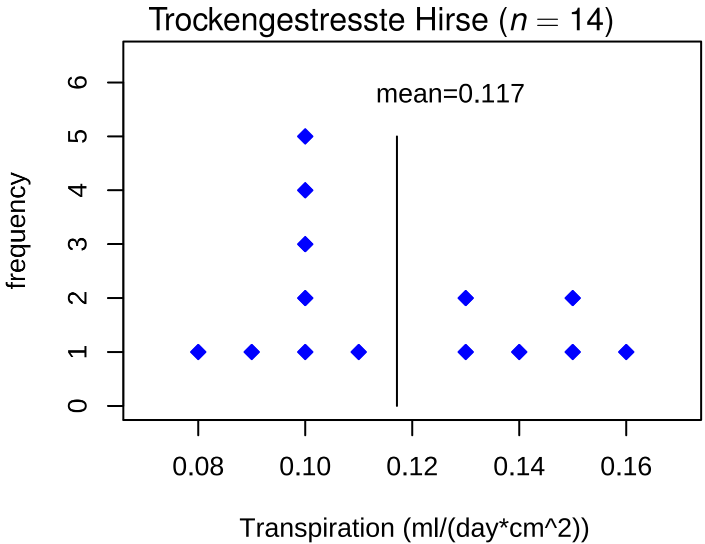
zu bestimmen.

In einem großen Versuch mit sehr vielen Pflanzen
könnte man μ beliebig genau bestimmen.
FRAGE:
Wie genau ist die Schätzung von μ
in diesem kleinen ($n = 14$) Versuch?

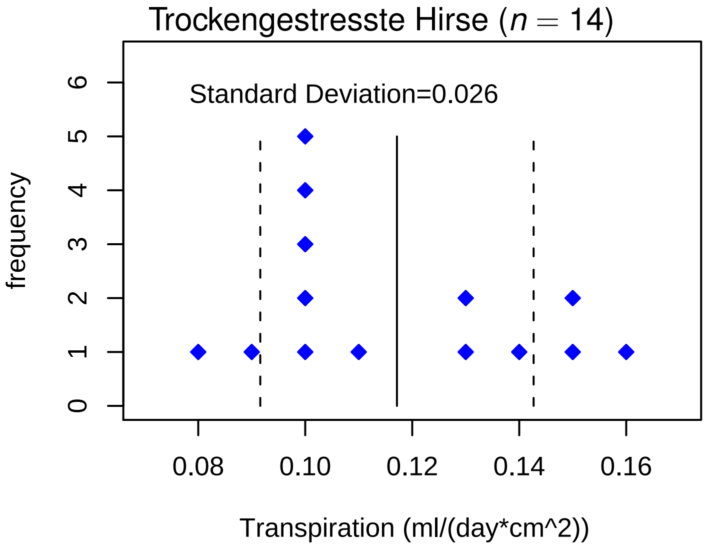
Ergebnisse des Versuchs



Ergebnisse des Versuchs



Ergebnisse des Versuchs



Transpirationsdaten: $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$

$$\overline{x} = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{14}\right)/14$$

Transpirationsdaten: $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$

$$\overline{x} = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{14}\right)/14$$

$$= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i$$

Transpirationsdaten: $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$

$$\overline{x} = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{14}\right)/14$$

$$= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i$$

$$\overline{x} = 0{,}117$$

Unsere Schätzung:

$\mu \approx 0{,}117$

Unsere Schätzung:
$\mu \approx 0{,}117$

Wie genau ist diese Schätzung?
Wie weit weicht der Schätzwert $\overline{x}$
von dem wahren Mittelwert μ ab?

Inhalt

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,
sondern
100 mal,

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,
sondern
100 mal,
1.000 mal,

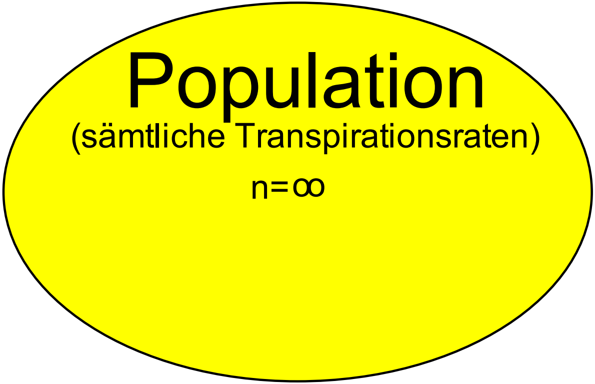
Ein allgemeiner Rahmen

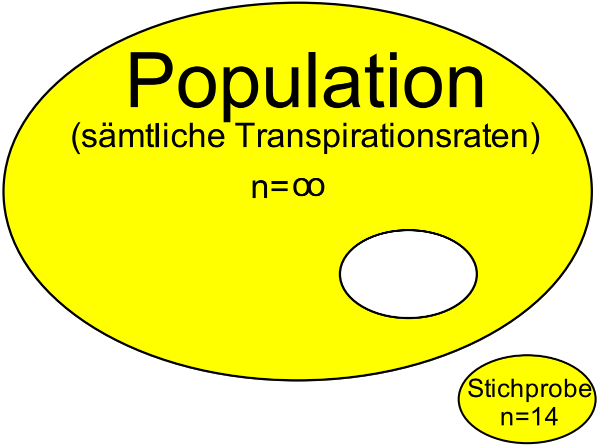
Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,
sondern
100 mal,
1.000 mal,
1.000.000 mal
wiederholt.

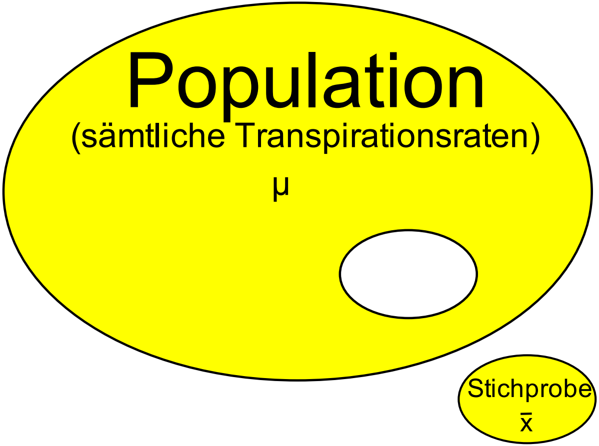
Unsere 14 Transpirationswerte
betrachten wir als

zufällige Stichprobe

aus dieser großen Population
von möglichen Werten.


Population
(sämtliche Transpirationsraten)
n=∞


Population
(sämtliche Transpirationsraten)
n=∞
Stichprobe
n=14


Population
(sämtliche Transpirationsraten)
μ
Stichprobe
x̄

Wir schätzen
den Populationsmittelwert μ
durch
den Stichprobenmittelwert
$\bar{x}$.

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\bar{x}$.

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\overline{x}$.
$\overline{x}$ hängt vom Zufall ab:
eine *Zufallsgröße*

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\overline{x}$.
$\overline{x}$ hängt vom Zufall ab:
eine *Zufallsgröße*
FRAGE: Wie variabel ist $\overline{x}$?

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\overline{x}$.

$\overline{x}$ hängt vom Zufall ab:

eine *Zufallsgröße*

FRAGE: Wie variabel ist $\overline{x}$?

Genauer: Wie weit weicht $\overline{x}$ typischerweise von μ ab?

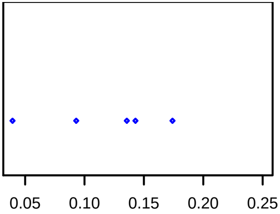
$$\overline{x} = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right) / n$$

Wovon hängt die Variabilität von $\overline{x}$ ab?

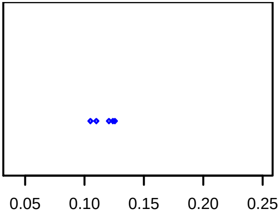
1.

von der
Variabilität
der einzelnen
Beobachtungen

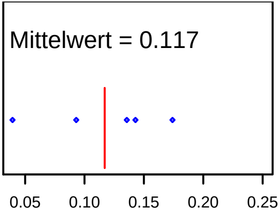
$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$



x variiert viel

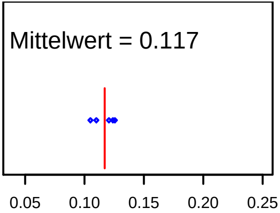


x variiert wenig



x variiert viel

$\Rightarrow \bar{x}$ variiert viel



x variiert wenig

$\Rightarrow \bar{x}$ variiert wenig

2.

vom
Stichprobenumfang
n

2.

vom
Stichprobenumfang
n

Je größer n,
desto kleiner
die Variabilität von $\overline{x}$.

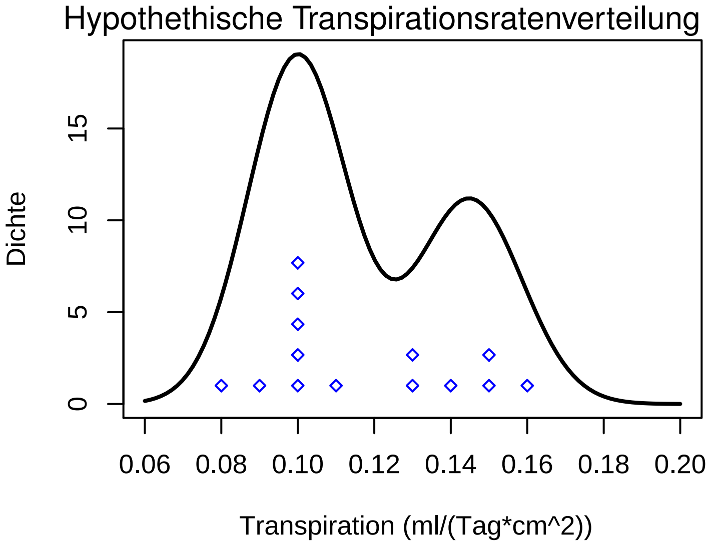
Um diese Abhängigkeit
zu untersuchen,
machen wir ein

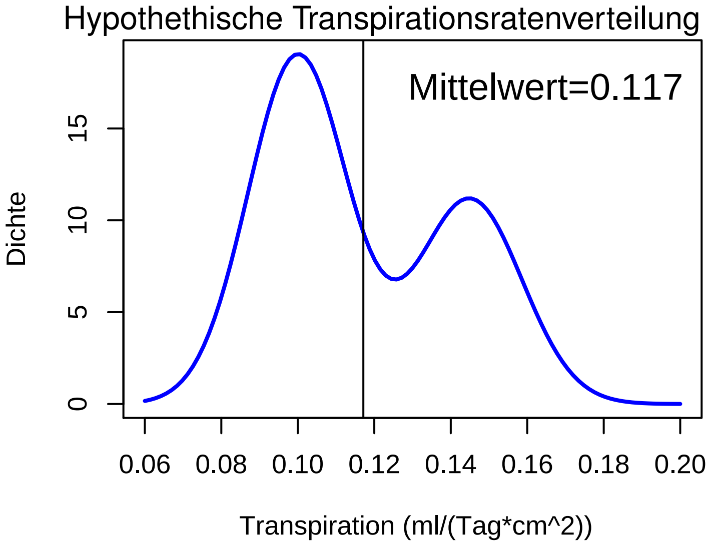
(Computer-)Experiment.

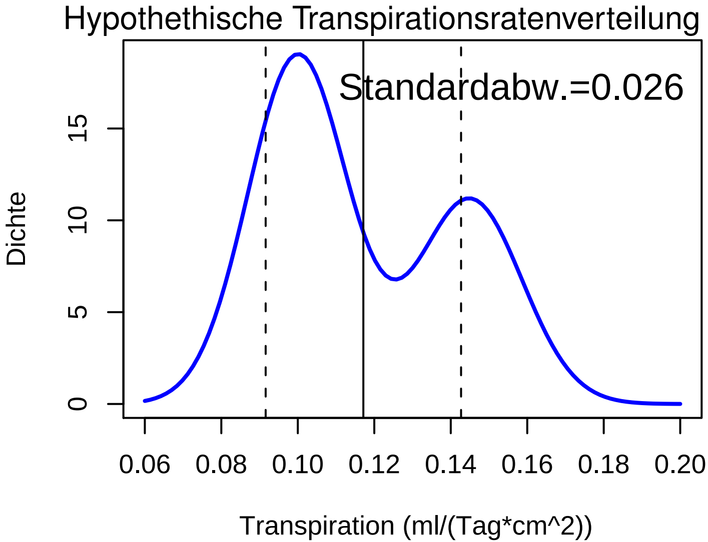
Experiment:

Wir nehmen eine Population,
ziehen Stichproben,
und schauen,
wie $\overline{x}$ variiert.

Nehmen wir an,
die Verteilung
aller möglichen Transpirationswerte
sieht folgendermaßen aus:

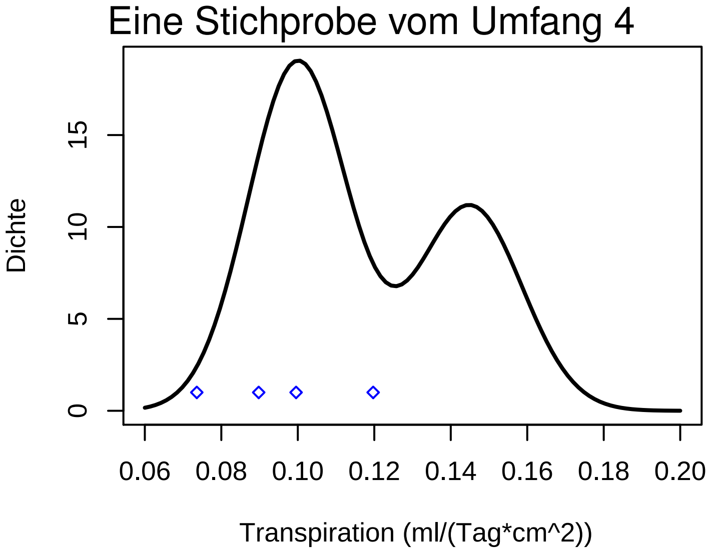

Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

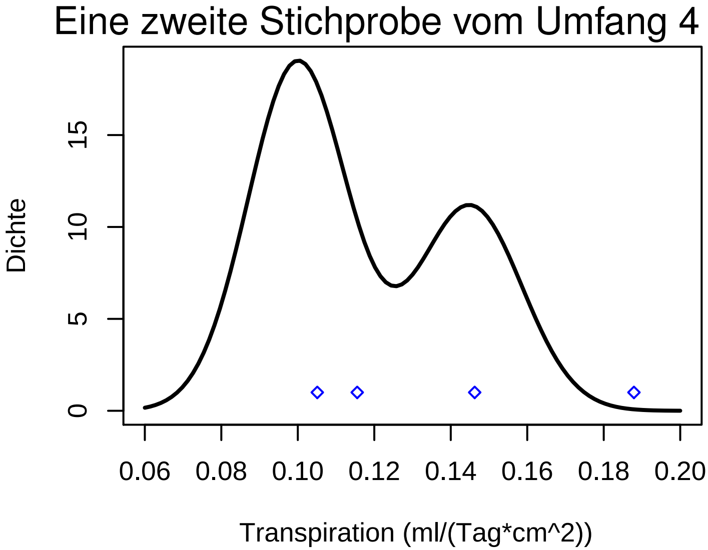

Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Mittelwert=0.117
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

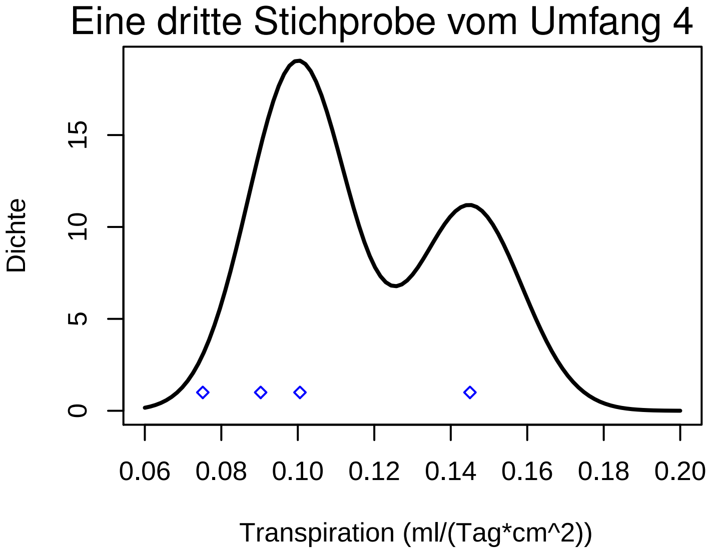

Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Standardabw.=0.026
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Wir beginnen mit kleinen Stichproben:

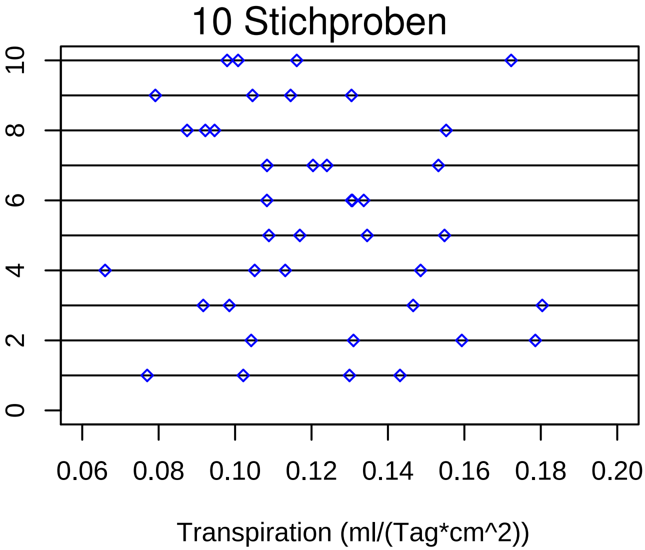
$$n = 4$$


Eine Stichprobe vom Umfang 4
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

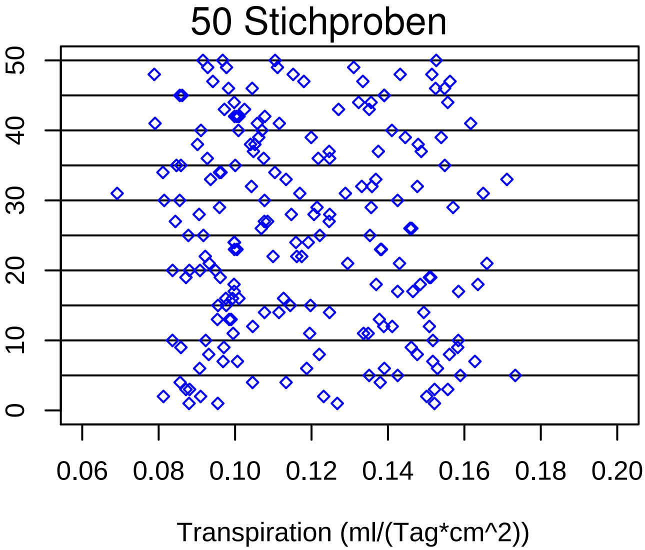

Eine zweite Stichprobe vom Umfang 4
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))


Eine dritte Stichprobe vom Umfang 4
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

10 Stichproben

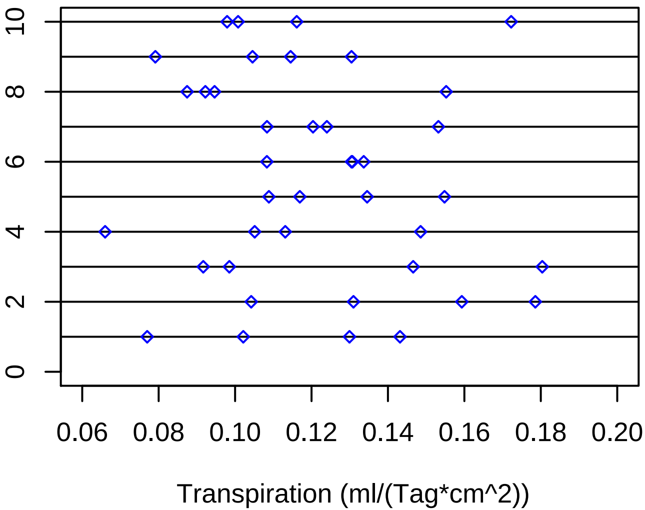

10 Stichproben
0
2
4
6
8
10
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

50 Stichproben

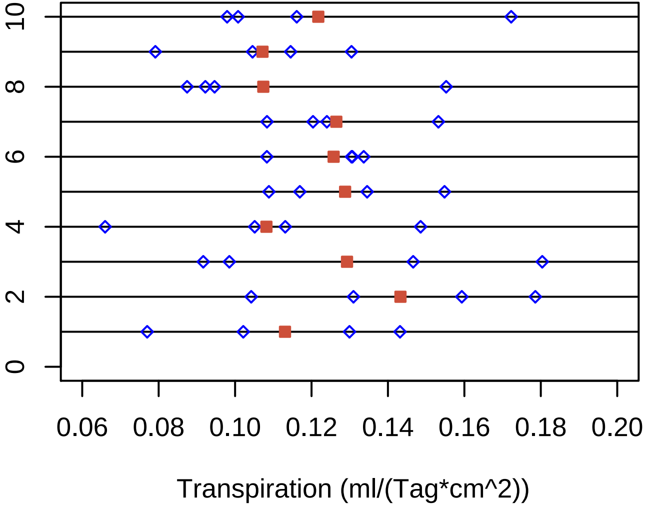

50 Stichproben
0
10
20
30
40
50
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Wie variabel sind
die Stichprobenmittelwerte?

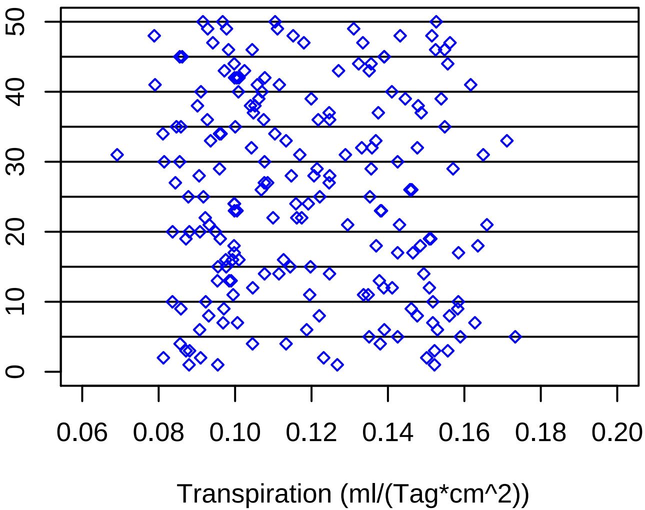
10 Stichproben vom Umfang 4



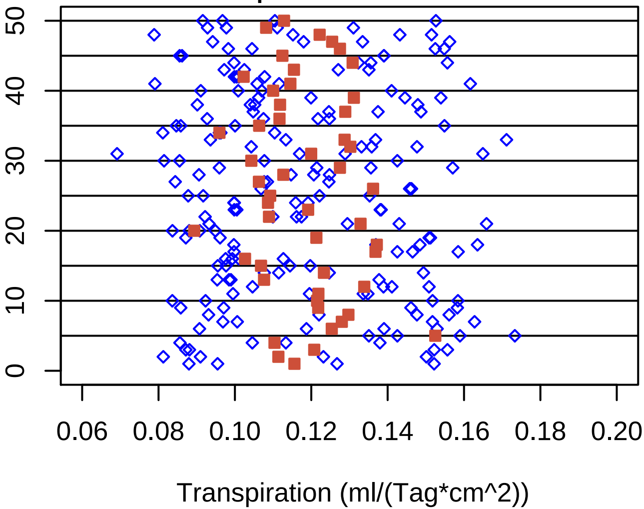
10 Stichproben vom Umfang 4 und die zugehörigen Stichprobenmittel

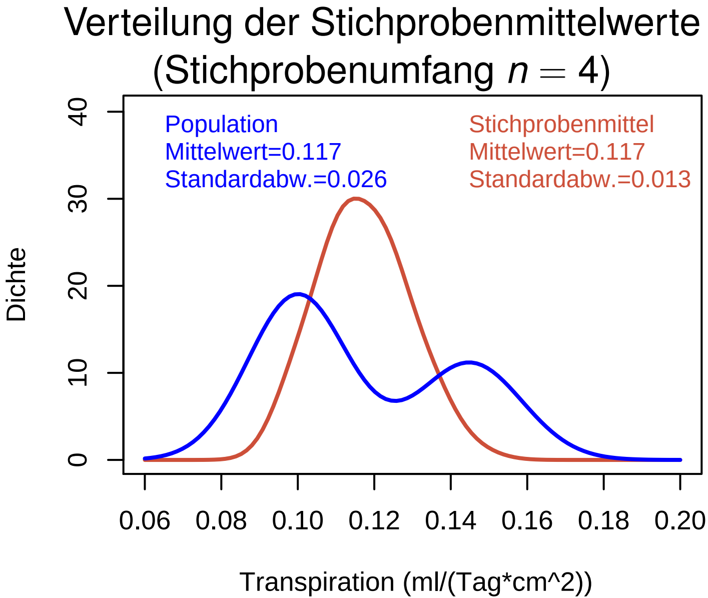


50 Stichproben vom Umfang 4



50 Stichproben vom Umfang 4 und die zugehörigen Stichprobenmittel




Verteilung der Stichprobenmittelwerte
(Stichprobenumfang $n = 4$)
Population
Mittelwert=0.117
Standardabw.=0.026
Stichprobenmittel
Mittelwert=0.117
Standardabw.=0.013
Dichte
0
10
20
30
40
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Population:
Standardabweichung = 0,026

Population:
Standardabweichung = $0{,}026$

Stichprobenmittelwerte ($n = 4$):
Standardabweichung = $0{,}013$

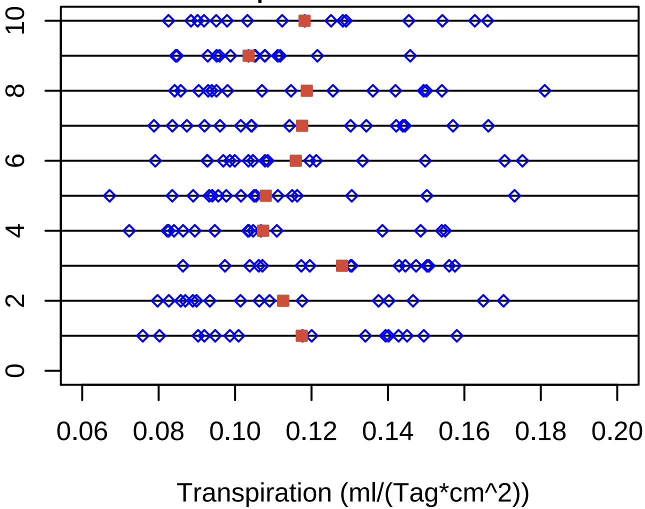
Population:
Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 4$):

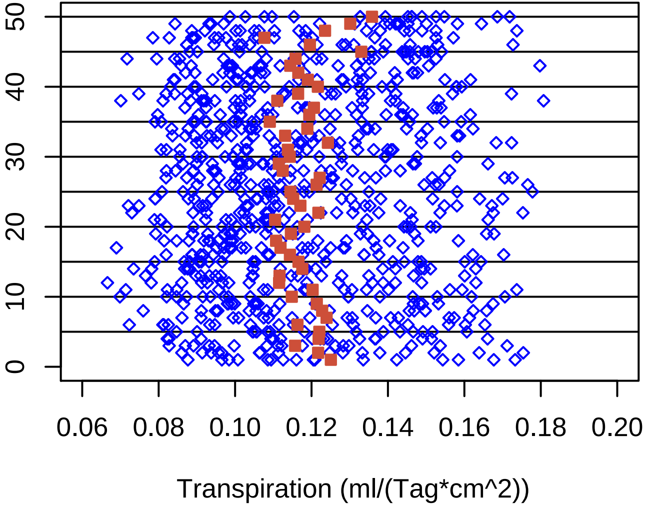
$$\begin{aligned} \text{Standardabweichung} &= 0{,}013 \\ &= 0{,}026/\sqrt{4} \end{aligned}$$

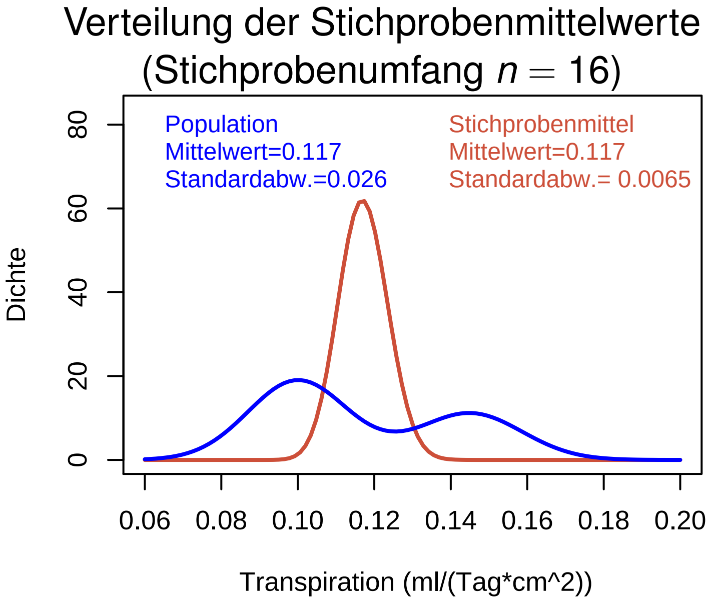
Erhöhen wir
den Stichprobenumfang
von
4
auf
16

10 Stichproben vom Umfang 16 und die zugehörigen Stichprobenmittel



50 Stichproben vom Umfang 16 und die zugehörigen Stichprobenmittel




Verteilung der Stichprobenmittelwerte
(Stichprobenumfang $n = 16$)
Population
Mittelwert=0.117
Standardabw.=0.026
Stichprobenmittel
Mittelwert=0.117
Standardabw.= 0.0065
Dichte
0
20
40
60
80
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Population:
Standardabweichung = 0,026

Population:
Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 16$):
Standardabweichung = 0,0065

Population:
Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 16$):

$$\text{Standardabweichung} = 0{,}0065 = 0{,}026/\sqrt{16}$$

Die allgemeine Regel

Die Standardabweichung
des Mittelwerts einer Stichprobe vom Umfang n

Die allgemeine Regel

Die Standardabweichung
des Mittelwerts einer Stichprobe vom Umfang n

ist
$1/\sqrt{n}$
mal
der Standardabweichung
der Population.

Die Standardabweichung der Population bezeichnet man mit

σ

(sigma).

Die Standardabweichung der Population bezeichnet man mit

$$\sigma$$

(sigma).

Die Regel schreibt man häufig so:

$$\sigma(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$$

In der Praxis ist

σ

unbekannt.

In der Praxis ist
σ
unbekannt.

Es wird durch
die Stichproben-Standardabweichung s
geschätzt:

In der Praxis ist

σ

unbekannt.

Es wird durch
die Stichproben-Standardabweichung s
geschätzt:

$$\sigma = ??$$

In der Praxis ist
σ
unbekannt.

Es wird durch
die Stichproben-Standardabweichung s
geschätzt:

$$\sigma \approx s$$

Die geschätzte Standardabweichung von $\overline{x}$

$s/\sqrt{n}$

nennt man den *Standardfehler*.

Die geschätzte
Standardabweichung
von $\overline{x}$

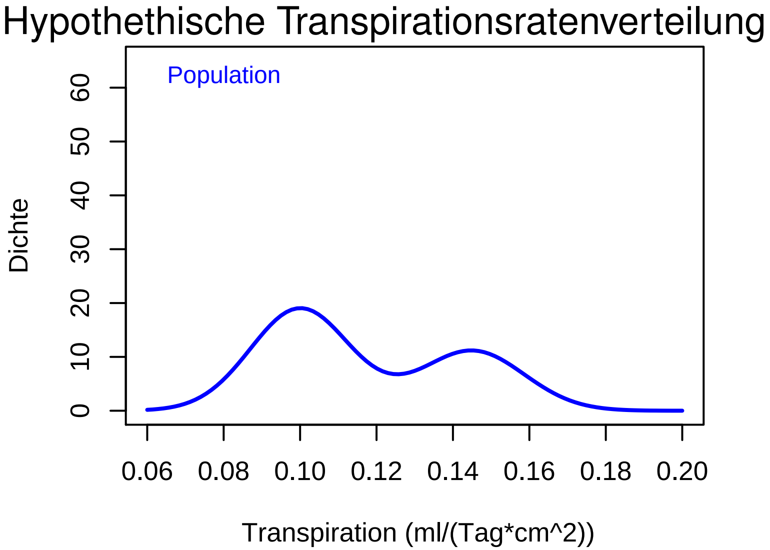
$s/\sqrt{n}$

nennt man den
Standardfehler.
(Englisch: *standard error of the mean*, *standard error*, *SEM*)

Inhalt

Wir haben gesehen:

Auch wenn die Verteilung von
x mehrgipfelig
&
asymmetrisch
ist


Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Population
Dichte
0
10
20
30
40
50
60
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

ist die Verteilung von

$\overline{x}$

trotzdem

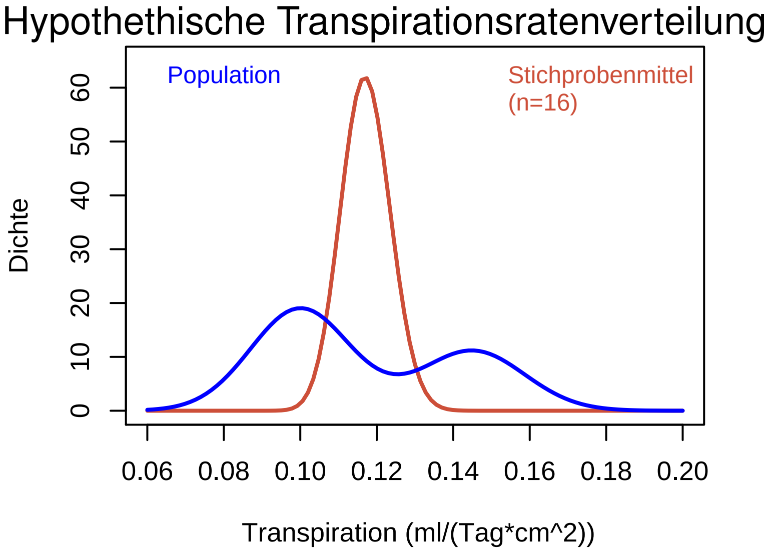
(annähernd)

eingipfelig

&

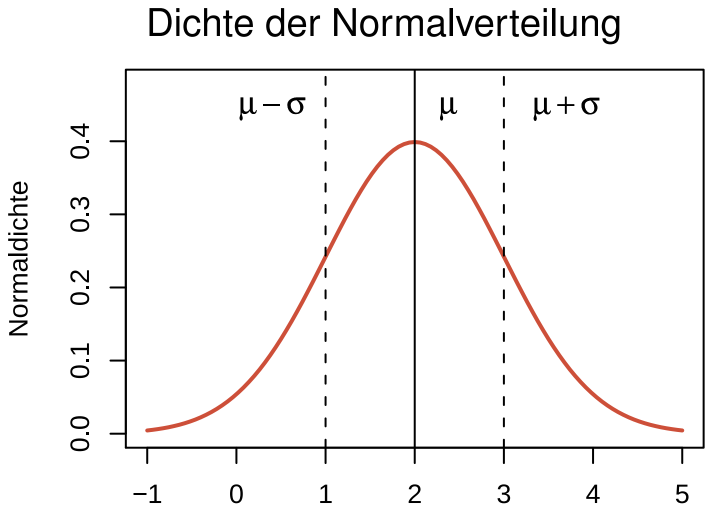
symmetrisch

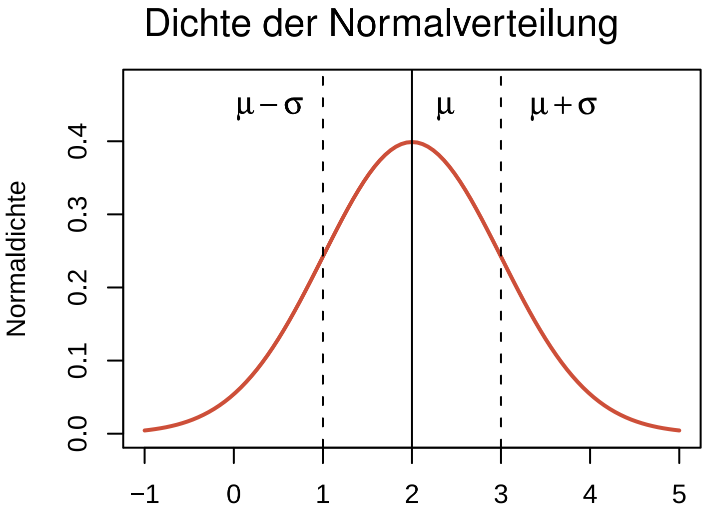
(wenn der Stichprobenumfang n nur groß genug ist)


Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Population
Stichprobenmittel
(n=16)
Dichte
0
10
20
30
40
50
60
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Die Verteilung von $\overline{x}$
hat annähernd
eine ganz bestimmte Form:

die Normalverteilung.


Dichte der Normalverteilung
μ − σ
μ
μ + σ
Normaldichte
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−1
0
1
2
3
4
5



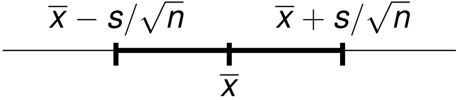
Die Normalverteilungsdichte heisst auch *Gauß'sche Glockenkurve*

Dichte der Normalverteilung

Die Normalverteilungsdichte heisst
auch *Gauß'sche Glockenkurve*
(nach Carl Friedrich Gauß, 1777-1855)

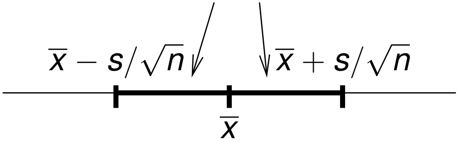
Wichtige Folgerung

Wir betrachten das Intervall



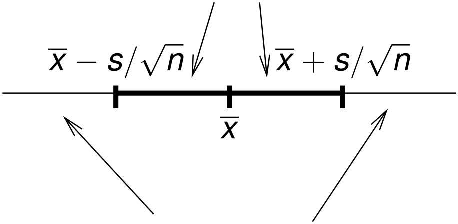
Wichtige Folgerung

Mit Wahrscheinlichkeit ca. $2/3$
liegt μ innerhalb dieses Intervalls



Wichtige Folgerung

Mit Wahrscheinlichkeit ca. $2/3$
liegt μ innerhalb dieses Intervalls



Mit Wahrscheinlichkeit ca. $1/3$
liegt μ ausserhalb des Intervalls

Demnach:

Es kommt durchaus vor, dass $\overline{x}$
von μ
um mehr als
$s/\sqrt{n}$ abweicht.

Inhalt

ANWENDUNG 1:
Welche Werte von μ sind plausibel?

ANWENDUNG 1:
Welche Werte von μ sind plausibel?

$$\bar{x} = 0{,}12$$
$$s/\sqrt{n} = 0{,}007$$

ANWENDUNG 1:
Welche Werte von μ sind plausibel?

$$\overline{x} = 0{,}12$$
$$s/\sqrt{n} = 0{,}007$$

Frage: Könnte es sein, dass $\mu = 0{,}115$?

Antwort: Es ist gut möglich.

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\overline{x} - \mu = 0{,}120 - 0{,}115 = 0{,}005.$$

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung
$\bar{x} - \mu = 0{,}120 - 0{,}115 = 0{,}005.$

Standardfehler
$s/\sqrt{n} = 0{,}007$

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\bar{x} - \mu = 0{,}120 - 0{,}115 = 0{,}005.$$

Standardfehler

$$s/\sqrt{n} = 0{,}007$$

Abweichungen dieser Größe
kommen häufig vor.

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung
$$\bar{x} - \mu = 0{,}120 - 0{,}115 = 0{,}005.$$

Standardfehler
$$s/\sqrt{n} = 0{,}007$$

Abweichungen dieser Größe
kommen häufig vor.

(Die Frage, welche Abweichungen *nicht* mehr plausibel sind, untersuchen wir später.)

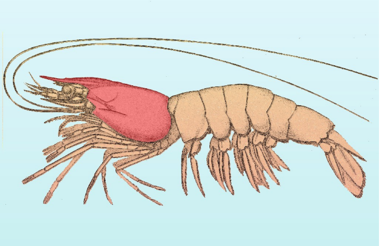
ANWENDUNG 2:
Vergleich von Mittelwerten

ANWENDUNG 2:
Vergleich von Mittelwerten Beispiel: Springkrebs

Galathea squamifera

image (c) by Matthias Buschmann

Vergleich der Carapaxlänge:



(c): public domain

Galathea: Carapaxlänge
in einer Stichprobe

Männchen:

$$\overline{x}_1 = 3{,}04 \text{ mm}$$
$$s_1 = 0{,}9 \text{ mm}$$
$$n_1 = 25$$

Weibchen:

$$\overline{x}_2 = 3{,}23 \text{ mm}$$
$$s_2 = 0{,}9 \text{ mm}$$
$$n_2 = 29$$

Die Weibchen
scheinen größer zu sein.

Die Weibchen
scheinen größer zu sein.

Ist das ernst zu nehmen?

Die Weibchen
scheinen größer zu sein.

Ist das ernst zu nehmen?

Oder könnte es nur Zufall sein?

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Männchen:

$$\overline{x}_1 = 3{,}04 \text{ mm}$$
$$s_1 = 0{,}9 \text{ mm}$$
$$n_1 = 25$$

$$s_1/\sqrt{n_1} = 0{,}18 \text{ [mm]}$$

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Männchen:

$$\overline{x}_1 = 3{,}04 \text{ mm}$$
$$s_1 = 0{,}9 \text{ mm}$$
$$n_1 = 25$$

$$s_1/\sqrt{n_1} = 0{,}18 \text{ [mm]}$$

Mit Schwankungen von $\pm 0{,}18$ (mm) in $\overline{x}_1$ müssen wir rechnen.

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Weibchen:

$$\overline{x}_2 = 3{,}23 \text{ mm}$$

$$s_2 = 0{,}9 \text{ mm}$$

$$n_2 = 29$$

$$s_2/\sqrt{n_2} = 0{,}17 \text{ [mm]}$$

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Weibchen:

$\overline{x}_2 = 3{,}23$ mm

$s_2 = 0{,}9$ mm

$n_2 = 29$

$s_2/\sqrt{n_2} = 0{,}17$ [mm]

Es ist nicht unwahrscheinlich,
dass $\overline{x}_2$ um mehr als $\pm 0{,}17$ (mm) vom wahren Mittelwert abweicht.

Die Differenz der Mittelwerte

$$3{,}23 - 3{,}04 = {\color{red}0{,}19}\ \text{[mm]}$$

Die Differenz der Mittelwerte

$$3{,}23 - 3{,}04 = {\color{red}0{,}19}\ [\mathrm{mm}]$$

ist kaum größer als
die zu erwartenden Schwankungen.

Die Differenz der Mittelwerte

$$3{,}23 - 3{,}04 = 0{,}19 \text{ [mm]}$$

ist kaum größer als
die zu erwartenden Schwankungen.

Es könnte also einfach Zufall sein,
dass
$\overline{x}_2 > \overline{x}_1$

GENAUER FORMULIERT:

Wenn in Wirklichkeit
die Populationsmittelwerte
gleich sind,

$$\mu_{\text{Weibchen}} = \mu_{\text{Männchen}}$$

GENAUER FORMULIERT:

Wenn in Wirklichkeit
die Populationsmittelwerte
gleich sind,

$\mu_{\text{Weibchen}} = \mu_{\text{Männchen}}$

kann es trotzdem leicht passieren,
dass die Stichprobenmittelwerte
$\overline{x}_2$ und $\overline{x}_1$
so weit auseinander liegen.

Der Statistiker sagt:
Die Differenz
der Mittelwerte
ist
(statistisch)
nicht signifikant.

nicht signifikant

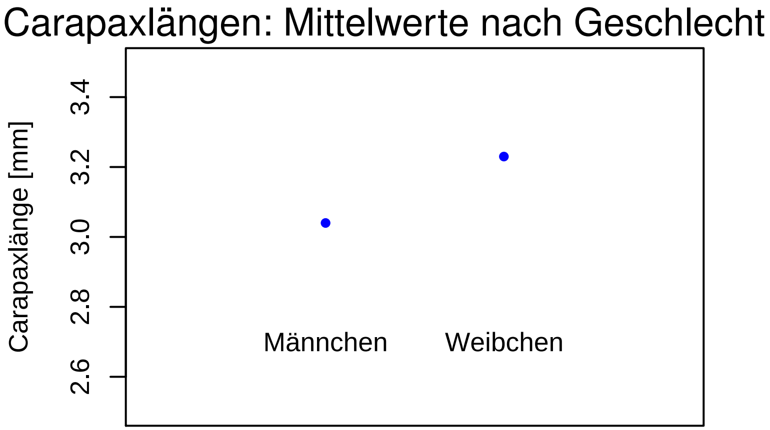
=

könnte Zufall sein

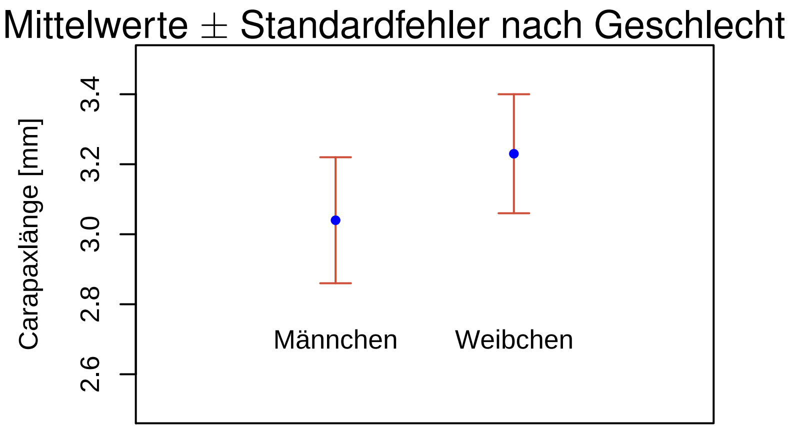
ANWENDUNG 3:

Wenn man Mittelwerte
graphisch darstellt,
sollte man auch
ihre Genauigkeit
($\pm s/\sqrt{n}$)
anzeigen.

Also nicht so:



sondern so:


Carapaxlängen:
Mittelwerte ± Standardfehler nach Geschlecht
Carapaxlänge [mm]
3.4
3.2
3.0
2.8
2.6
Männchen
Weibchen

ANWENDUNG 4:

Bei der Versuchsplanung:

ANWENDUNG 4:

Bei der Versuchsplanung:

Wieviele Beobachtungen

brauche ich?

(Wie groß sollte die Stichprobenlänge n sein?)

Wenn man weiß, welche Genauigkeit
(Standardfehler $s/\sqrt{n}$)
für $\overline{x}$ man erreichen will,

Wenn man weiß, welche Genauigkeit
(Standardfehler $s/\sqrt{n}$)
für $\overline{x}$ man erreichen will,

und wenn man
(aus Erfahrung oder aus einem Vorversuch)
s ungefähr kennt,

Wenn man weiß, welche Genauigkeit
(Standardfehler $s/\sqrt{n}$)
für $\overline{x}$ man erreichen will,

und wenn man
(aus Erfahrung oder aus einem Vorversuch)
s ungefähr kennt,
dann kann man
das notwendige n ungefähr abschätzen:

$$s/\sqrt{n} = g$$

(g = gewünschter Standardfehler)

Beispiel:
Gestresste Transpirationswerte
bei einer anderen Hirse-Sorte:

$$\overline{x} = 0{,}18$$

$$s = 0{,}06$$

$$n = 13$$

Beispiel:
Gestresste Transpirationswerte
bei einer anderen Hirse-Sorte:

$$\overline{x} = 0{,}18$$
$$s = 0{,}06$$
$$n = 13$$

Nehmen wir an, der Versuch soll wiederholt werden
und man will
Standardfehler $\approx 0{,}01$ erreichen.

Beispiel:
Gestresste Transpirationswerte
bei einer anderen Hirse-Sorte:

$$\overline{x} = 0{,}18$$
$$s = 0{,}06$$
$$n = 13$$

Nehmen wir an, der Versuch soll wiederholt werden
und man will
Standardfehler $\approx 0{,}01$ erreichen.

Wie groß sollte n sein?

Lösung:

gewünscht:

$s/\sqrt{n} \approx 0{,}01$

Lösung:

gewünscht:

$s/\sqrt{n} \approx 0{,}01$

aus dem Vorversuch wissen wir:

$$s \approx 0{,}06$$

Lösung:

gewünscht:

$s/\sqrt{n} \approx 0{,}01$

aus dem Vorversuch wissen wir:

$$
\begin{aligned}
s &\approx 0{,}06 \\
\sqrt{n} &\approx \frac{0,06}{0,01} = 6
\end{aligned}
$$

Lösung:
gewünscht:
$s/\sqrt{n} \approx 0{,}01$
aus dem Vorversuch wissen wir:

$$
\begin{aligned}
s &\approx 0{,}06 \\
\sqrt{n} &\approx \frac{0,06}{0,01} = 6 \\
n &\approx 36
\end{aligned}
$$

Inhalt

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße
  mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße
  mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.
- Man schätzt die Standardabweichung von $\overline{x}$ mit $s/\sqrt{n}$.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße
  mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.
- Man schätzt die Standardabweichung von $\overline{x}$ mit $s/\sqrt{n}$.
- $s/\sqrt{n}$ nennt man den Standardfehler.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße
mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.
- Man schätzt die Standardabweichung von $\overline{x}$ mit $s/\sqrt{n}$.
- $s/\sqrt{n}$ nennt man den Standardfehler.
- Schwankungen in $\overline{x}$ von der Größe $s/\sqrt{n}$ kommen häufig vor.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße
  mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.
- Man schätzt die Standardabweichung von $\overline{x}$ mit $s/\sqrt{n}$.
- $s/\sqrt{n}$ nennt man den Standardfehler.
- Schwankungen in $\overline{x}$ von der Größe $s/\sqrt{n}$ kommen häufig vor.
  Solche Schwankungen sind „nicht signifikant": sie könnten Zufall sein.