

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Biologen

5. Der zwei-Stichproben-*t*-Test

(*t*-Test für ungepaarte Stichproben)

und der Wilcoxon-Test

Martin Hutzenthaler & Dirk Metzler

<http://www.zi.biologie.uni-muenchen.de/evol/StatGen.html>

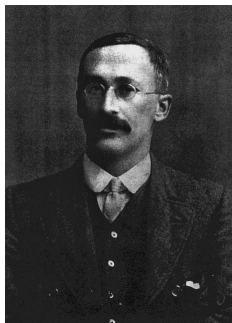
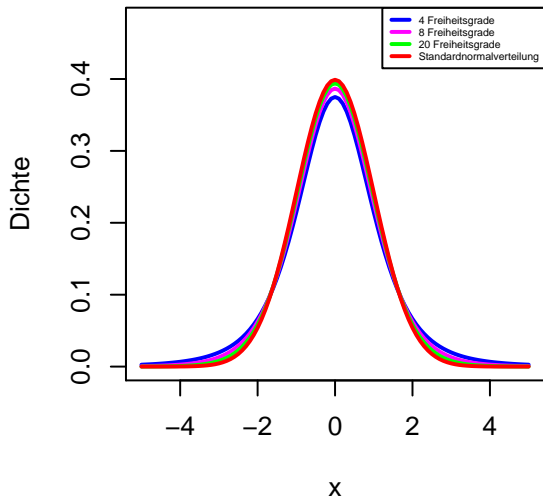
20. Mai 2010

- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 t -Test für ungepaarte Stichproben
 - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
 - Power eines Tests
 - Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test
- 3 Wilcoxon's Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
- 4 Zusammenfassung

Inhalt

- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 t -Test für ungepaarte Stichproben
 - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
 - Power eines Tests
 - Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test
- 3 Wilcoxon's Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
- 4 Zusammenfassung

„Student“ und seine Verteilung(en)



William S. Gosset,
1876–1937

Zusammenfassung gepaarter t-Test

Gegeben: gepaarte Beobachtungen

$$(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), \dots, (Y_n, Z_n)$$

Zusammenfassung gepaarter t-Test

Gegeben: gepaarte Beobachtungen

$$(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), \dots, (Y_n, Z_n)$$

Nullhypothese $H_0: \mu_Y = \mu_Z$

Signifikanzniveau: α (meist $\alpha = 5\%$)

Zusammenfassung gepaarter t-Test

Gegeben: gepaarte Beobachtungen

$$(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), \dots, (Y_n, Z_n)$$

Nullhypothese $H_0: \mu_Y = \mu_Z$

Signifikanzniveau: α (meist $\alpha = 5\%$)

Test: gepaarter t-Test (genauer: zweiseitiger gepaarter t-Test)

Berechne Differenz $X := Y - Z$

Berechne Teststatistik

$$t := \frac{\bar{X}}{s(X)/\sqrt{n}}$$

Zusammenfassung gepaarter t-Test

Gegeben: gepaarte Beobachtungen

$$(Y_1, Z_1), (Y_2, Z_2), \dots, (Y_n, Z_n)$$

Nullhypothese $H_0: \mu_Y = \mu_Z$

Signifikanzniveau: α (meist $\alpha = 5\%$)

Test: gepaarter t-Test (genauer: zweiseitiger gepaarter t-Test)

Berechne Differenz $X := Y - Z$

Berechne Teststatistik

$$t := \frac{\bar{X}}{s(X)/\sqrt{n}}$$

p-Wert = $\Pr(|T_{n-1}| \geq |t|)$ ($n - 1$ Freiheitsgrade)

Verwirf Nullhypothese, falls p-Wert $\leq \alpha$

Zusammenfassung Ein-Stichproben t-Test

Gegeben: Beobachtungen

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

Zusammenfassung Ein-Stichproben t-Test

Gegeben: Beobachtungen

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

Nullhypothese $H_0: \mu_X = c$ (Den Wert c testet man, oft $c = 0$)

Signifikanzniveau: α (meist $\alpha = 5\%$)

Zusammenfassung Ein-Stichproben t-Test

Gegeben: Beobachtungen

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

Nullhypothese $H_0: \mu_X = c$ (Den Wert c testet man, oft $c = 0$)

Signifikanzniveau: α (meist $\alpha = 5\%$)

Test: t-Test

Berechne Teststatistik

$$t := \frac{\bar{X} - c}{s(X)/\sqrt{n}}$$

Zusammenfassung Ein-Stichproben t-Test

Gegeben: Beobachtungen

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

Nullhypothese $H_0: \mu_X = c$ (Den Wert c testet man, oft $c = 0$)

Signifikanzniveau: α (meist $\alpha = 5\%$)

Test: t-Test

Berechne Teststatistik

$$t := \frac{\bar{X} - c}{s(X)/\sqrt{n}}$$

p-Wert = $\Pr(|T_{n-1}| \geq |t|)$ ($n - 1$ Freiheitsgrade)

Verwirf Nullhypothese, falls p-Wert $\leq \alpha$

Inhalt

- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 **t-Test für ungepaarte Stichproben**
 - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
 - Power eines Tests
 - Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test
- 3 Wilcoxons Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
- 4 Zusammenfassung

Inhalt

- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 **t-Test für ungepaarte Stichproben**
 - **Beispiel: Backenzähne von Hipparions**
 - Power eines Tests
 - Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test
- 3 Wilcoxons Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
- 4 Zusammenfassung

Beispiel: Backenzähne von Hipparions



Die Daten

77 Backenzähne

Die Daten

77 Backenzähne

gefunden in den Chiwondo Beds, Malawi,

Die Daten

77 Backenzähne

gefunden in den Chiwondo Beds, Malawi,

jetzt in den Sammlungen des
Hessischen Landesmuseums, Darmstadt

Zuordnung

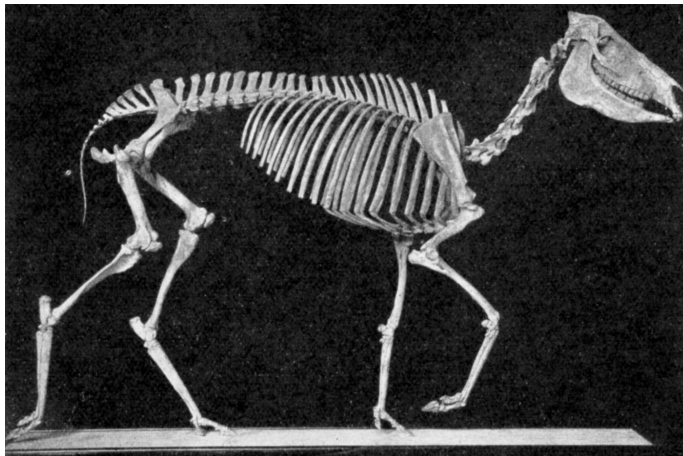
Die Zähne wurden zwei Arten zugeordnet:

Hipparion africanum

≈ 4 Mio. Jahre

Hipparion libycum

≈ 2,5 Mio. Jahre



Geologischer Hintergrund

Vor 2,8 Mio. Jahren kühlte sich das Klima weltweit ab.

Geologischer Hintergrund

Vor 2,8 Mio. Jahren kühlte sich das Klima weltweit ab.

Das Klima in Ostafrika:
warm-feucht \longrightarrow kühl-trocken

Geologischer Hintergrund

Vor 2,8 Mio. Jahren kühlte sich das Klima weltweit ab.

Das Klima in Ostafrika:
warm-feucht → kühl-trocken

Hipparion:
Laubfresser → Grasfresser

Frage

Hipparion:
Laubfresser \longrightarrow Grasfresser

Frage

Hipparion:

Laubfresser \longrightarrow Grasfresser

andere Nahrung \longrightarrow andere Zähne?

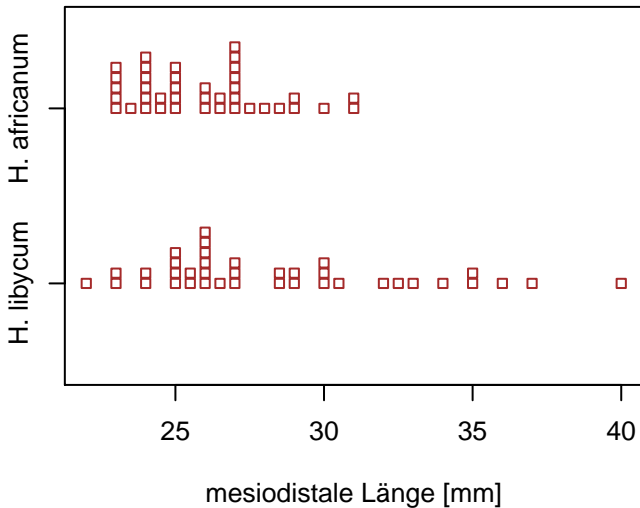
Frage

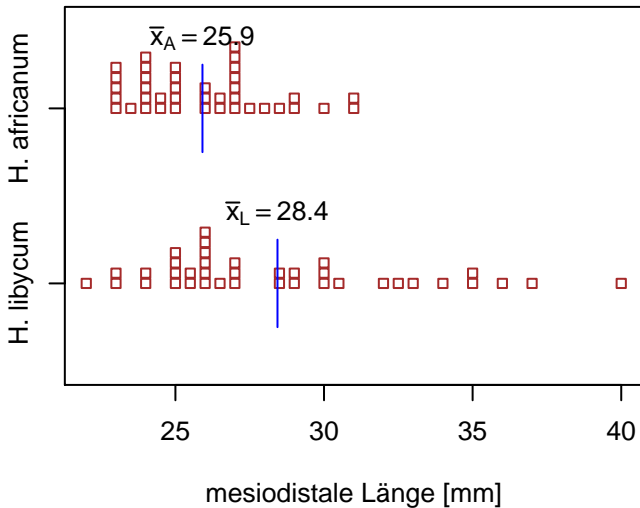
Hipparion:

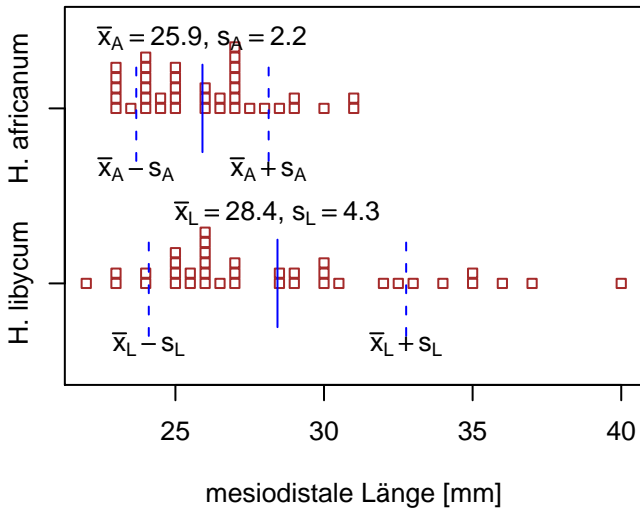
Laubfresser → Grasfresser

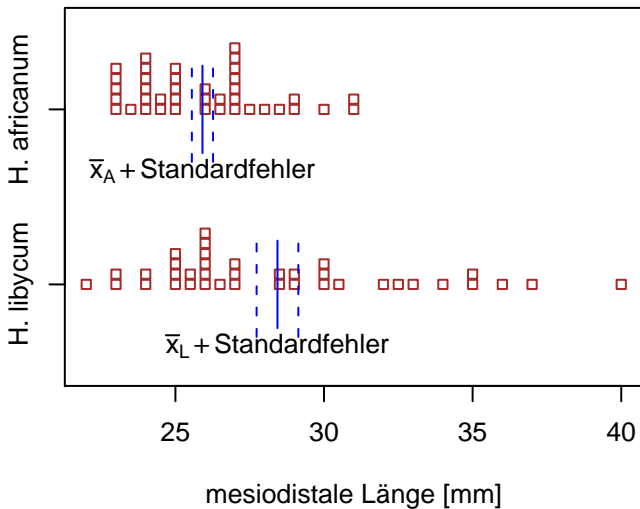
andere Nahrung → andere Zähne?

Messungen: mesiodistale Länge
distal = von der Mittellinie weg









Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$$\bar{x}_A = 25,9, s_A = 2,2,$$

Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$\bar{x}_A = 25,9$, $s_A = 2,2$, unser Schätzwert für die Streuung von \bar{x}_A ist also $f_A = s_A = 2,2/\sqrt{n_A} = 0,36$ (Standardfehler)

Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$\bar{x}_A = 25,9$, $s_A = 2,2$, unser Schätzwert für die Streuung von \bar{x}_A ist
also $f_A = s_A = 2,2/\sqrt{n_A} = 0,36$ (Standardfehler),

$\bar{x}_L = 28,4$, $s_L = 4,3$,

Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$\bar{x}_A = 25,9$, $s_A = 2,2$, unser Schätzwert für die Streuung von \bar{x}_A ist also $f_A = s_A = 2,2/\sqrt{n_A} = 0,36$ (Standardfehler),

$\bar{x}_L = 28,4$, $s_L = 4,3$, unser Schätzwert für die Streuung von \bar{x}_L ist also $f_L = s_L = 4,3/\sqrt{n_L} = 0,70$.

Wir beobachten ($n_A = 39$, $n_L = 38$):

$\bar{x}_A = 25,9$, $s_A = 2,2$, unser Schätzwert für die Streuung von \bar{x}_A ist also $f_A = s_A = 2,2/\sqrt{n_A} = 0,36$ (Standardfehler),

$\bar{x}_L = 28,4$, $s_L = 4,3$, unser Schätzwert für die Streuung von \bar{x}_L ist also $f_L = s_L = 4,3/\sqrt{n_L} = 0,70$.

Ist die beobachtete Abweichung $\bar{x}_L - \bar{x}_A = 2,5$ mit der **Nullhypothese** verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

t-Statistik

Ist die beobachtete Abweichung $\bar{x}_L - \bar{x}_A = 2,5$ mit der
Nullhypothese verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

t-Statistik

Ist die beobachtete Abweichung $\bar{x}_L - \bar{x}_A = 2,5$ mit der **Nullhypothese** verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

Wir schätzen die Streuung von $\bar{x}_L - \bar{x}_A$ durch f , wo

$$f^2 = f_L^2 + f_A^2$$

t-Statistik

Ist die beobachtete Abweichung $\bar{x}_L - \bar{x}_A = 2,5$ mit der **Nullhypothese** verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

Wir schätzen die Streuung von $\bar{x}_L - \bar{x}_A$ durch f , wo

$$f^2 = f_L^2 + f_A^2$$

und bilden $t = \frac{\bar{x}_L - \bar{x}_A}{f}$.

t-Statistik

Ist die beobachtete Abweichung $\bar{x}_L - \bar{x}_A = 2,5$ mit der **Nullhypothese** verträglich, dass $\mu_L = \mu_A$?

Wir schätzen die Streuung von $\bar{x}_L - \bar{x}_A$ durch f , wo

$$f^2 = f_L^2 + f_A^2$$

und bilden $t = \frac{\bar{x}_L - \bar{x}_A}{f}$.

Wenn die Nullhypothese zutrifft, ist t (approximativ) Student-verteilt mit g Freiheitsgraden (wobei g aus den Daten geschätzt wird.)

Zwei-Stichproben-*t*-Test mit R

```
> A <- md[Art=="africanum"]  
> L <- md[Art=="libycum"]  
> t.test(L,A)
```

Welch Two Sample t-test

data: L and A

t = 3.2043, df = 54.975, p-value = 0.002255

alternative hypothesis: true difference in means
is not equal to 0

95 percent confidence interval:

0.9453745 4.1025338

sample estimates:

mean of x mean of y

28.43421 25.91026

Formulierung:

„Die mittlere mesiodistale Länge war signifikant größer (28,4 mm) bei *H. libycum* als bei *H. africanum* (25,9 mm) (t -Test, $p = 0,002$).“

Wir haben keine Annahme an die Varianzen der beiden Stichproben gemacht. Es gibt auch eine Variante des t -Tests mit der zusätzlichen Annahme $\sigma_A^2 = \sigma_L^2$:

```
> t.test(L,A,var.equal=TRUE)
```

Two Sample t-test

```
data: L and A
```

```
t = 3.2289, df = 75, p-value = 0.001845
```

```
alternative hypothesis: true difference in means  
is not equal to 0
```

```
95 percent confidence interval:
```

```
 0.9667634 4.0811448
```

```
sample estimates:
```

```
mean of x mean of y
```

```
28.43421 25.91026
```

Inhalt

- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 **t-Test für ungepaarte Stichproben**
 - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
 - **Power eines Tests**
 - Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test
- 3 Wilcoxon's Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
- 4 Zusammenfassung

Testpower bzw. Testmacht

Salopp gesprochen ist die **Power** oder **Macht** eines Tests die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese abzulehnen, falls die Alternative zutrifft.

Testpower bzw. Testmacht

Salopp gesprochen ist die **Power** oder **Macht** eines Tests die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese abzulehnen, falls die Alternative zutrifft.

Bei einer einelementigen Alternative ist dies leicht zu formulieren: $H_0 : \mu = 0$
 $H_1 : \mu = m_1$

Testpower bzw. Testmacht

Salopp gesprochen ist die **Power** oder **Macht** eines Tests die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese abzulehnen, falls die Alternative zutrifft.

Bei einer einelementigen Alternative ist dies leicht zu formulieren: $H_0 : \mu = 0$
 $H_1 : \mu = m_1$

Die Testpower (oder auch Testmacht) ist dann definiert als \Pr_{H_1} (Nullhypothese wird abgelehnt)

Warum interessiert uns die Testmacht?

Warum interessiert uns die Testmacht?

Im Extremfall ist die Testmacht gleich 0,
dann wird die Nullhypothese nie abgelehnt.
Somit können wir unsere Vermutung nicht stützen.

Warum interessiert uns die Testmacht?

Im Extremfall ist die Testmacht gleich 0,
dann wird die Nullhypothese nie abgelehnt.
Somit können wir unsere Vermutung nicht stützen.

Je größer die Testmacht,
desto wahrscheinlicher wird die Nullhypothese abgelehnt.
Beachte: Die Testmacht hängt stark
von der Stichprobenlänge ab.

Warum interessiert uns die Testmacht?

Im Extremfall ist die Testmacht gleich 0, dann wird die Nullhypothese nie abgelehnt. Somit können wir unsere Vermutung nicht stützen.

Je größer die Testmacht, desto wahrscheinlicher wird die Nullhypothese abgelehnt.
Beachte: Die Testmacht hängt stark von der Stichprobenlänge ab.

In der Praxis muss man sich bereits **vor Versuchsbeginn** Gedanken machen, wie groß die Stichprobenlänge sein muss, damit man die Vermutung stützen kann.

Inhalt

- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 **t-Test für ungepaarte Stichproben**
 - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
 - Power eines Tests
 - **Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test**
- 3 Wilcoxons Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
- 4 Zusammenfassung

Wann gepaarter t -Test (`paired=TRUE`) und wann ungepaarter t -Test (`paired=FALSE`)?

Wann gepaarter t -Test (`paired=TRUE`) und wann ungepaarter t -Test (`paired=FALSE`)?

Wenn die **Stichprobenlänge unterschiedlich** ist, macht „gepaart“ keinen Sinn (R gibt Fehler aus).

Wann gepaarter t -Test (`paired=TRUE`) und wann ungepaarter t -Test (`paired=FALSE`)?

Wenn die **Stichprobenlänge unterschiedlich** ist, macht „gepaart“ keinen Sinn (R gibt Fehler aus).

Wenn **die Stichprobenlänge gleich** ist:

- Sind die Stichproben unabhängig voneinander?
Falls ja, dann `paired=FALSE`, da wegen der höheren Zahl an Freiheitsgraden die Power größer ist.

Wann gepaarter t -Test (`paired=TRUE`) und wann ungepaarter t -Test (`paired=FALSE`)?

Wenn die **Stichprobenlänge unterschiedlich** ist, macht „gepaart“ keinen Sinn (R gibt Fehler aus).

Wenn **die Stichprobenlänge gleich** ist:

- Sind die Stichproben unabhängig voneinander?
Falls ja, dann `paired=FALSE`,
da wegen der höheren Zahl an Freiheitsgraden die Power größer ist.
- Sind die Stichproben voneinander abhängig?
(z.B. Messungen von denselben Individuen bzw. Objekten)
Falls ja, dann `paired=TRUE`.
Bei starker Abhängigkeitsstruktur hat der gepaarte t -Test höhere Testpower (da der Test von Variabilität zwischen den Individuen bereinigt ist)

Inhalt

- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 t -Test für ungepaarte Stichproben
 - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
 - Power eines Tests
 - Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test
- 3 **Wilcoxon's Rangsummentest**
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
- 4 Zusammenfassung

Inhalt

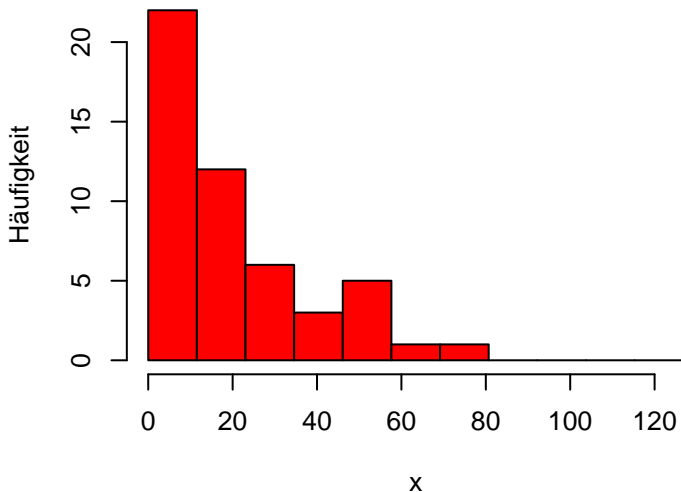
- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 t -Test für ungepaarte Stichproben
 - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
 - Power eines Tests
 - Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test
- 3 **Wilcoxon's Rangsummentest**
 - **Motivation**
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
- 4 Zusammenfassung

Bei (ungefähr) glockenförmigen und symmetrisch verteilten Beobachtungen oder wenn die Stichprobenumfänge genügend groß sind können wir den t -Test benutzen, um die Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2$ zu testen: Die t -Statistik ist (annähernd) Student-verteilt.

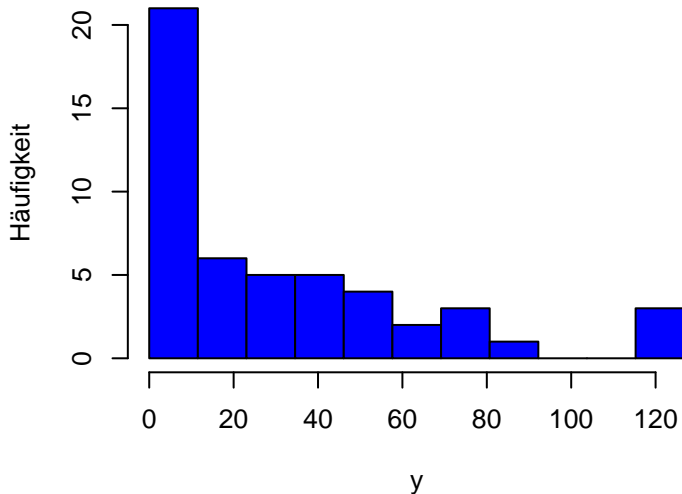
Bei (ungefähr) glockenförmigen und symmetrisch verteilten Beobachtungen oder wenn die Stichprobenumfänge genügend groß sind können wir den t -Test benutzen, um die Nullhypothese $\mu_1 = \mu_2$ zu testen: Die t -Statistik ist (annähernd) Student-verteilt.

Besonders bei sehr asymmetrischen und langschwänzigen Verteilungen kann das anders sein

Nehmen wir an, wir sollten folgende Verteilungen vergleichen:



Nehmen wir an, wir sollten folgende Verteilungen vergleichen:



Beispiele

Beispiele

- Wartezeiten

Beispiele

- Wartezeiten
- Ausbreitungsentfernungen

Beispiele

- Wartezeiten
- Ausbreitungsentfernungen
- Zelltypenhäufigkeiten

Beispiele

- Wartezeiten
- Ausbreitungsentfernungen
- Zelltypenhäufigkeiten

Gesucht:

ein „verteilungsfreier“ Test
mit dem man die Lage zweier Verteilungen
zueinander testen kann

Inhalt

- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 t -Test für ungepaarte Stichproben
 - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
 - Power eines Tests
 - Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test
- 3 **Wilcoxon's Rangsummentest**
 - Motivation
 - **Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben**
- 4 Zusammenfassung

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

Wir möchten die **Nullhypothese**:
 X und Y aus derselben Population
(X und Y haben **diesselbe Verteilung**)
testen.

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

Wir möchten die **Nullhypothese**:
 X und Y aus derselben Population
(X und Y haben **diesselbe Verteilung**)
testen.

Alternative:

Die beiden Verteilungen sind gegeneinander verschoben.

Beobachtungen: Zwei Stichproben

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

Wir möchten die **Nullhypothese**:
 X und Y aus derselben Population
(X und Y haben **diesselbe Verteilung**)
testen.

Alternative:

Die beiden Verteilungen sind gegeneinander verschoben.

Voraussetzung des Tests:

Die beiden Verteilungen haben diesselbe Form,
sind also bis auf eine Lageverschiebung (in etwa) identisch.

Idee

Beobachtungen:

$X : x_1, x_2, \dots, x_m$

$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.

Idee

Beobachtungen:

$X : x_1, x_2, \dots, x_m$

$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X -Werte unter allen $m + n$ Beobachtungen.

Idee

Beobachtungen:

$X : x_1, x_2, \dots, x_m$

$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$

- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X -Werte unter allen $m + n$ Beobachtungen.
- Wenn die Nullhypothese zutrifft, sind die m X -Ränge eine rein zufällige Wahl aus $\{1, 2, \dots, m + n\}$.

Idee

Beobachtungen:

$$X : x_1, x_2, \dots, x_m$$

$$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$$

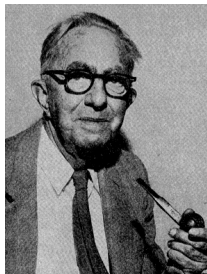
- Sortiere alle Beobachtungen der Größe nach.
- Bestimme die Ränge der m X -Werte unter allen $m + n$ Beobachtungen.
- Wenn die Nullhypothese zutrifft, sind die m X -Ränge eine rein zufällige Wahl aus $\{1, 2, \dots, m + n\}$.
- Berechne die Summe der X -Ränge, prüfe, ob dieser Wert untypisch groß oder klein.

Wilcoxon's Rangsummenstatistik

Beobachtungen:

$X : x_1, x_2, \dots, x_m$

$Y : y_1, y_2, \dots, y_n$



Frank Wilcoxon,
1892-1965

$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$
heißt
Wilcoxon's Rangsummenstatistik

Wilcoxon's Rangsummenstatistik

Bemerkung:

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$$

Wir könnten auch die Summe der Y -Ränge benutzen,

Wilcoxon's Rangsummenstatistik

Bemerkung:

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$$

Wir könnten auch die Summe der Y -Ränge benutzen, denn

$$\begin{aligned} & \text{Summe der } X\text{-Ränge} + \text{Summe der } Y\text{-Ränge} \\ &= \text{Summe aller Ränge} \\ &= 1 + 2 + \dots + (m + n) = \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} \end{aligned}$$

Wilcoxon's Rangsummenstatistik

Bemerkung:

$$W = \text{Summe der } X\text{-Ränge} - (1 + 2 + \dots + m)$$

Wir könnten auch die Summe der Y -Ränge benutzen, denn

$$\begin{aligned} & \text{Summe der } X\text{-Ränge} + \text{Summe der } Y\text{-Ränge} \\ &= \text{Summe aller Ränge} \\ &= 1 + 2 + \dots + (m + n) = \frac{(m + n)(m + n + 1)}{2} \end{aligned}$$

Bemerkung

Der Wilcoxon Test heißt auch Mann-Whitney- Test.
Die Mann-Whitney Statistik $U = W + \text{Konstante}$.

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

X : 1,5; 5,6; 35,2

Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

X : 1,5; 5,6; 35,2

Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Lege Beobachtungen zusammen und sortiere:

1,5; 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

X : 1,5; 5,6; 35,2

Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Lege Beobachtungen zusammen und sortiere:

1,5; 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Bestimme Ränge:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

Ein kleines Beispiel

- Beobachtungen:

X : 1,5; 5,6; 35,2

Y : 7,9; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Lege Beobachtungen zusammen und sortiere:

1,5; 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8

- Bestimme Ränge:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

- Rangsumme: $W = 1 + 2 + 4 - (1 + 2 + 3) = 1$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

Interpretation von W

X -Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W =$

Interpretation von W

X-Population kleiner $\implies W$ klein:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 0$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 1$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 2$

X-Population größer $\implies W$ groß:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 21$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 20$

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 $W = 19$

Signifikanz

Nullhypothese:
 X -Stichprobe und Y -Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Signifikanz

Nullhypothese:
 X -Stichprobe und Y -Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X -Stichprobe
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

Signifikanz

Nullhypothese:
 X -Stichprobe und Y -Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X -Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

Signifikanz

Nullhypothese:
 X -Stichprobe und Y -Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X -Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

sein können.

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X-Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

sein können.

Es gibt $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ Möglichkeiten.

Signifikanz

Nullhypothese:
X-Stichprobe und Y-Stichprobe
stammen aus
derselben Verteilung

Die 3 Ränge der X-Stichprobe

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

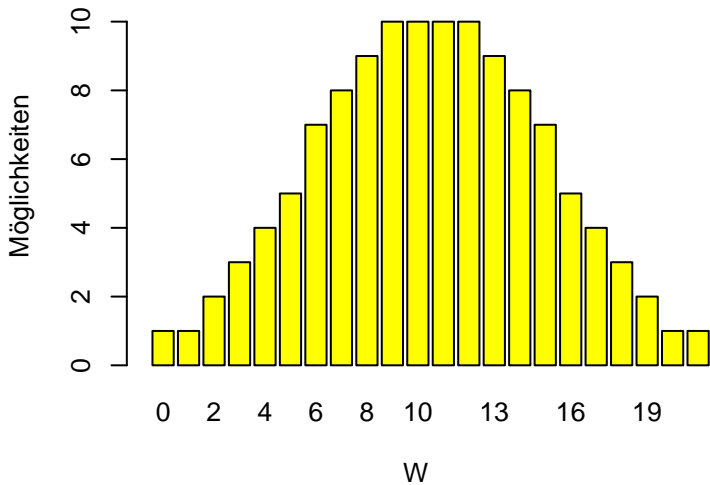
hätten genausogut irgendwelche 3 Ränge

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

sein können.

Es gibt $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$ Möglichkeiten.

(Allgemein: $\frac{(m+n)(m+n-1)\dots(n+1)}{m(m-1)\dots 1} = \frac{(m+n)!}{n!m!} = \binom{m+n}{m}$ Möglichkeiten)

Verteilung der Wilcoxon-Statistik ($m = 3, n = 7$)

Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich
wahrscheinlich, also

$$\Pr(W = w) = \frac{\text{Anz. Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}$$

Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich
wahrscheinlich, also

$$\Pr(W = w) = \frac{\text{Anz. Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}$$

Wir beobachten in unserem Beispiel:

1,5, 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8
somit $W = 1$

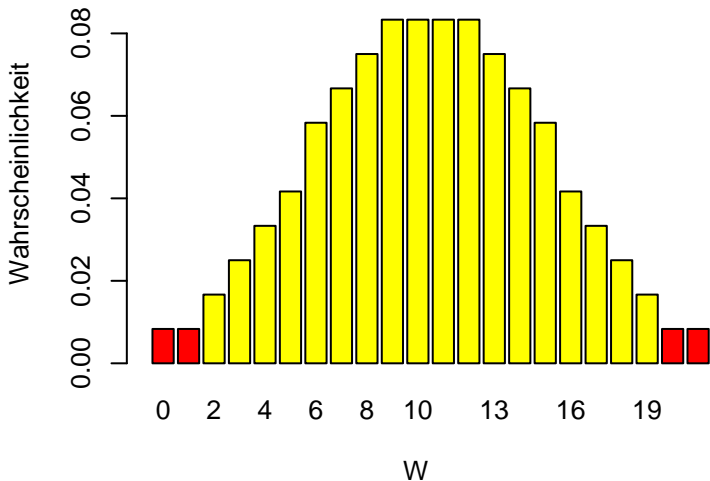
Unter der Nullhypothese sind alle Rangbelegungen gleich
wahrscheinlich, also

$$\Pr(W = w) = \frac{\text{Anz. Möglichkeiten mit Rangsummenstatistik } w}{120}$$

Wir beobachten in unserem Beispiel:

1,5; 5,6; 7,9; 35,2; 38,1; 41,0; 56,7; 112,1; 197,4; 381,8
somit $W = 1$

$$\begin{aligned} & \Pr(W \leq 1) + \Pr(W \geq 20) \\ = & \Pr(W = 0) + \Pr(W = 1) + \Pr(W = 20) + \Pr(W = 21) \\ & = \frac{1+1+1+1}{120} \doteq 0,033 \end{aligned}$$

Verteilung der Wilcoxon-Statistik ($m = 3, n = 7$)

Für unser Beispiel ($W = 1$) also:

$$p\text{-Wert} = \Pr(\text{ein so extremes } W) = 4/120 = 0,033$$

Für unser Beispiel ($W = 1$) also:

$$p\text{-Wert} = \Pr(\text{ein so extremes } W) = 4/120 = 0,033$$

Wir **lehnen** die **Nullhypothese**,
dass die Verteilungen
von X und Y
identisch sind,
auf dem 5%-Niveau **ab**.

R kennt den Wilcoxon-Test mittels `wilcox.test`:

```
> x
[1] 1.5  5.6 35.2
> y
[1]  7.9  38.1  41.0  56.7 112.1 197.4 381.8
> wilcox.test(x,y)
```

Wilcoxon rank sum test

data: x and y

$W = 1$, p-value = 0.03333

alternative hypothesis: true location shift is
not equal to 0

Achtung

Achtung!!!

Wenn der Wilcoxon-Test Signifikanz anzeigt, so kann das daran liegen, dass die zu grunde liegenden Verteilungen verschiedene Formen haben.

Achtung

Achtung!!!

Wenn der Wilcoxon-Test Signifikanz anzeigt, so kann das daran liegen, dass die zu grunde liegenden Verteilungen verschiedene Formen haben.

Der Wilcoxon-Test kann beispielsweise Signifikanz anzeigen, **selbst wenn die Stichproben-Mittelwerte übereinstimmen!**

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch
der Wilcoxon-Test können verwendet werden,
um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch der Wilcoxon-Test können verwendet werden, um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Der t -Test testet „nur“ auf Gleichheit der Erwartungswerte.

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch der Wilcoxon-Test können verwendet werden, um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Der t -Test testet „nur“ auf Gleichheit der Erwartungswerte.
Der Wilcoxon-Test dagegen testet auf Gleichheit der gesamten Verteilungen.

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch der Wilcoxon-Test können verwendet werden, um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Der t -Test testet „nur“ auf Gleichheit der Erwartungswerte.
Der Wilcoxon-Test dagegen testet auf Gleichheit der gesamten Verteilungen.

In den meisten Fällen liefern beide Tests dasselbe Ergebnis.
Im Allgemeinen empfehlen wir den t -Test, da er robuster ist.

Vergleich von t -Test und Wilcoxon-Test

Beachte:

Sowohl der t -Test als auch der Wilcoxon-Test können verwendet werden, um eine vermutete Verschiebung der Verteilung zu stützen.

Der t -Test testet „nur“ auf Gleichheit der Erwartungswerte.
Der Wilcoxon-Test dagegen testet auf Gleichheit der gesamten Verteilungen.

In den meisten Fällen liefern beide Tests dasselbe Ergebnis.
Im Allgemeinen empfehlen wir den t -Test, da er robuster ist.

In besonderen Fällen

- Verteilungen sind asymmetrisch
- Stichprobenlänge ist klein

hat der Wilcoxon-Test eine höhere Testpower.

Vergleichen wir (spañeshalber) mit dem t -Test:

```
> x
[1]  1.5  5.6 35.2
> y
[1]  7.9 38.1 41.0 56.7 112.1 197.4 381.8
> t.test(x,y)
```

Welch Two Sample t-test

data: x and y

$t = -2.0662$, $df = 6.518$, $p\text{-value} = 0.08061$

alternative hypothesis: true difference in means is not e

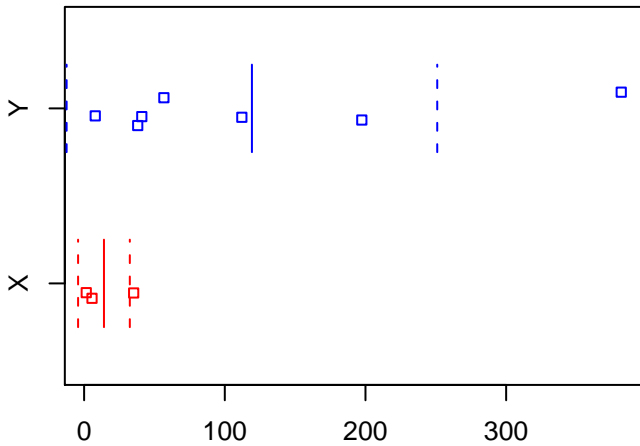
95 percent confidence interval:

-227.39182 17.02039

sample estimates:

mean of x mean of y

14.1000 119.2857



Inhalt

- 1 Wiederholung: Ein-Stichproben- t -Test
- 2 t -Test für ungepaarte Stichproben
 - Beispiel: Backenzähne von Hipparions
 - Power eines Tests
 - Vergleich: gepaarter t -Test und ungepaarter t -Test
- 3 Wilcoxon's Rangsummentest
 - Motivation
 - Wilcoxon-Test für unabhängige Stichproben
- 4 Zusammenfassung

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir ziehen Stichproben aus den Populationen
mit Stichproben-Mittelwerten

\bar{X}_1 \bar{X}_2

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir ziehen Stichproben aus den Populationen
mit Stichproben-Mittelwerten

$$\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2$$

Um die Nullhypothese H_0 zu prüfen, bilden wir die **t -Statistik**

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{f} \quad \text{mit} \quad f^2 = \left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}} \right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}} \right)^2$$

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir ziehen Stichproben aus den Populationen
mit Stichproben-Mittelwerten

$$\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2$$

Um die Nullhypothese H_0 zu prüfen, bilden wir die **t -Statistik**

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{f} \quad \text{mit} \quad f^2 = \left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}} \right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}} \right)^2$$

p -Wert unter H_0 : $p \approx \Pr(|T_g| \geq |t|)$

(g =(geschätzte) Anz. Freiheitsgrade, hängt von n_1 , n_2 , s_1 , s_2 ab)

Wir untersuchen ein Merkmal
in zwei Populationen:

Population	1	2
Mittelwert	μ_1	μ_2

Nullhypothese: $\mu_1 = \mu_2$

Wir ziehen Stichproben aus den Populationen
mit Stichproben-Mittelwerten

$$\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2$$

Um die Nullhypothese H_0 zu prüfen, bilden wir die **t -Statistik**

$$t = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{f} \quad \text{mit} \quad f^2 = \left(\frac{s_1}{\sqrt{n_1}} \right)^2 + \left(\frac{s_2}{\sqrt{n_2}} \right)^2$$

p -Wert unter H_0 : $p \approx \Pr(|T_g| \geq |t|)$

(g =(geschätzte) Anz. Freiheitsgrade, hängt von n_1 , n_2 , s_1 , s_2 ab)

In besonderen Fällen können wir
stattdessen den **Wilcoxon-Test** verwenden.