Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Biologen
2. Der Standardfehler

Martin Hutzenthaler & Dirk Metzler

http://www.zi.biologie.uni-muenchen.de/evol/StatGen.html

27. April 2010

1. Eine kurze Wiederholung zur deskriptiven Statistik
   - Mittelwert und Standardabweichung
   - Ein Beispiel zur Warnung

2. Der Standardfehler
   - Ein allgemeiner Rahmen
   - Zur Verteilung von $\overline{x}$
   - Anwendungen
   - Zusammenfassung

Inhalt

Inhalt

Bachstelzen fressen Dungfliegen

Räuber

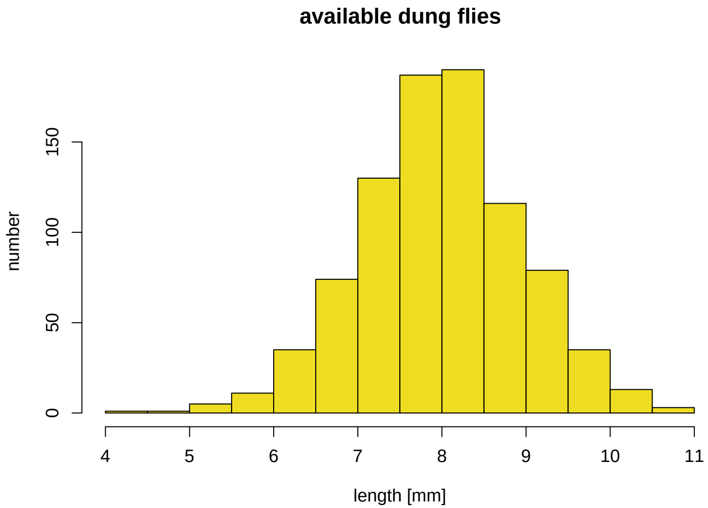
Bachstelze (White Wagtail)
Motacilla alba alba

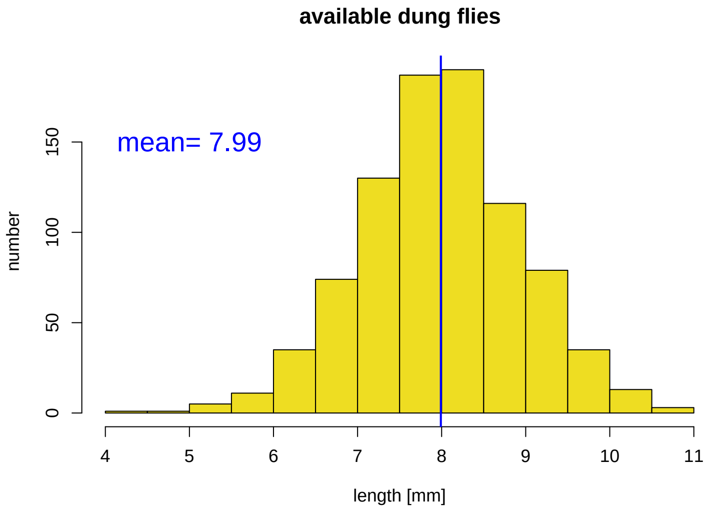
image (c) by Artur Mikołajewski

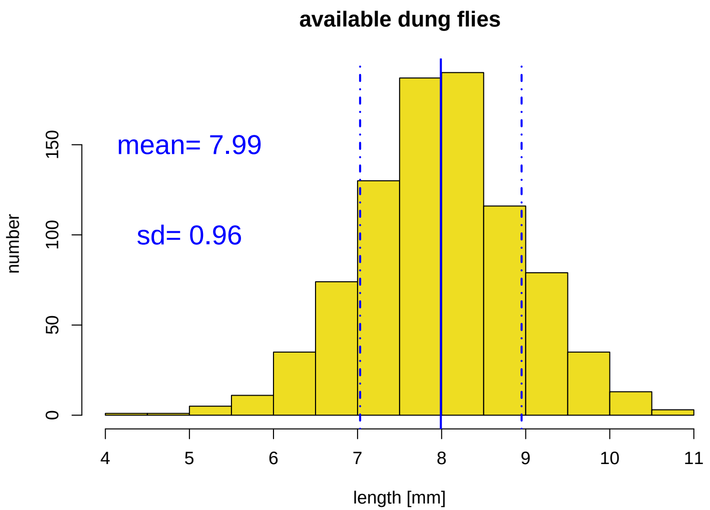
Beute

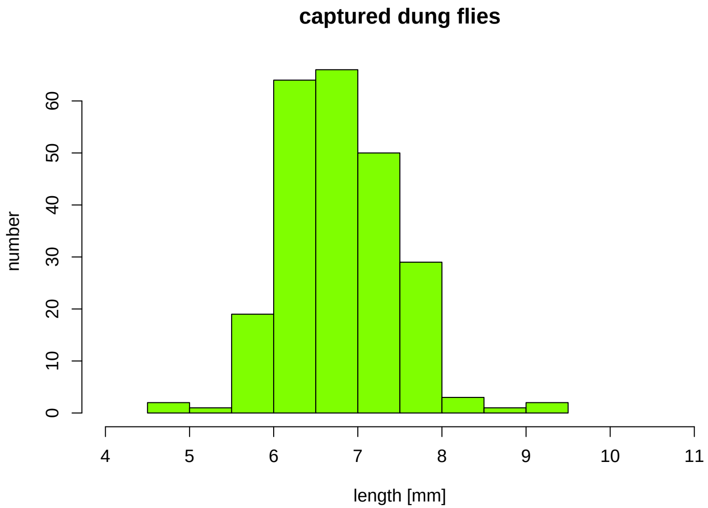
Gelbe Dungfliege
Scatophaga stercoraria

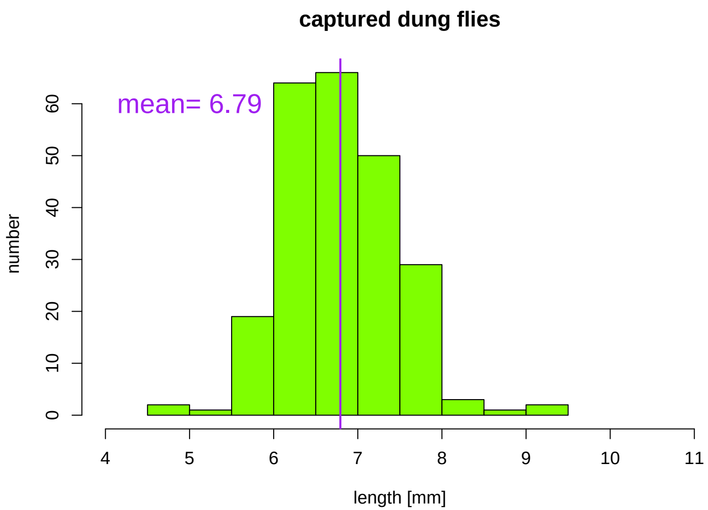
image (c) by Viatour Luc

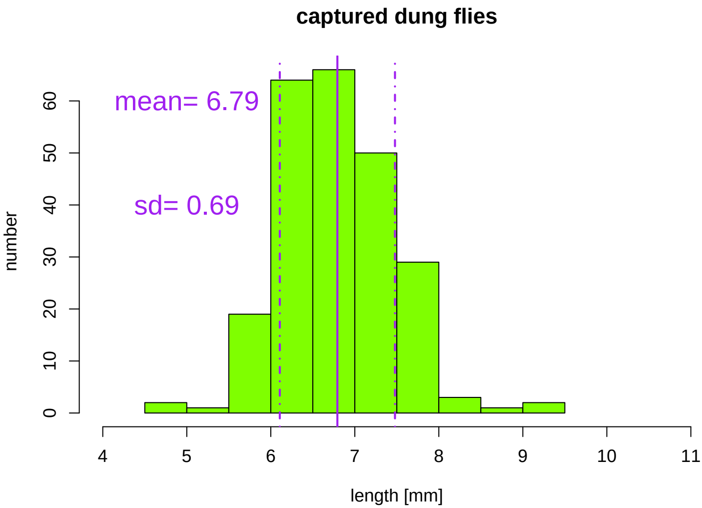

available dung flies
number
0
50
100
150
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]


available dung flies
mean= 7.99
number
0
50
100
150
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]


available dung flies
mean= 7.99
sd= 0.96
number
0
50
100
150
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]


captured dung flies
number
0
10
20
30
40
50
60
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]


captured dung flies
mean= 6.79
number
0
10
20
30
40
50
60
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]


captured dung flies
mean= 6.79
sd= 0.69
number
0
10
20
30
40
50
60
4
5
6
7
8
9
10
11
length [mm]

Beobachtung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den Mittelwert und die Standardabweichung angemessen beschrieben werden.

Beobachtung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den Mittelwert und die Standardabweichung angemessen beschrieben werden.

Es gibt aber auch Ausnahmen.

Inhalt

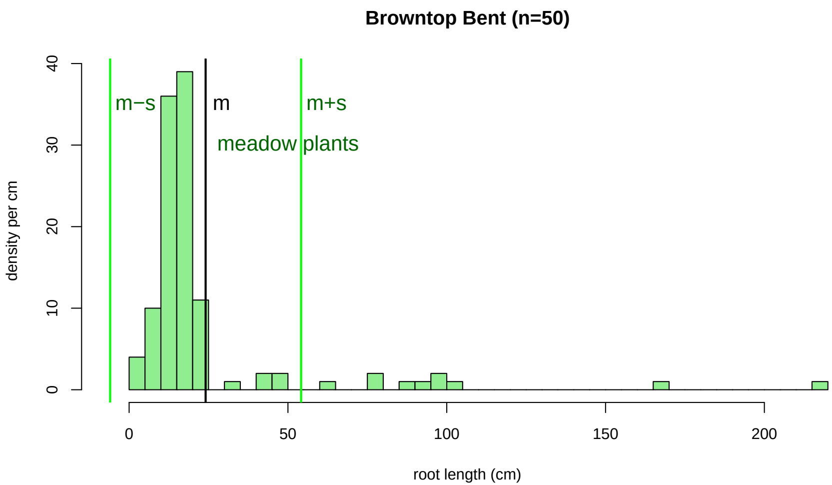
Kupfertolerantes Rotes Straußgras

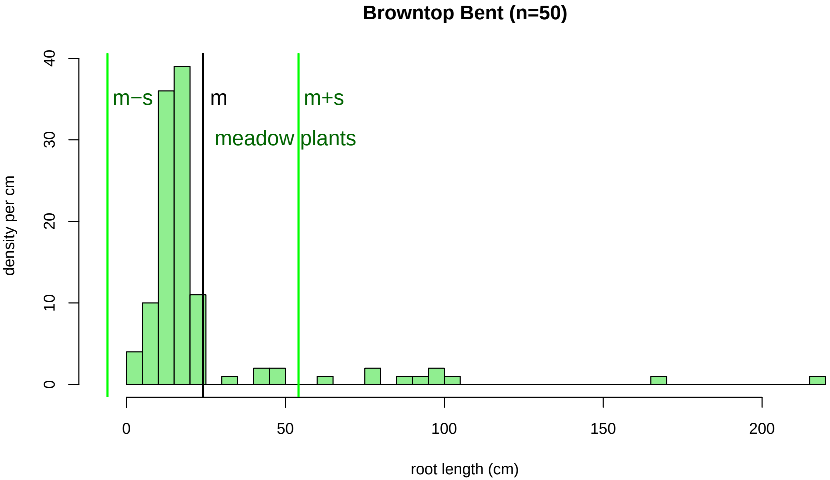
Rotes Straußgras
Agrostis tenuis

image (c) Kristian Peters

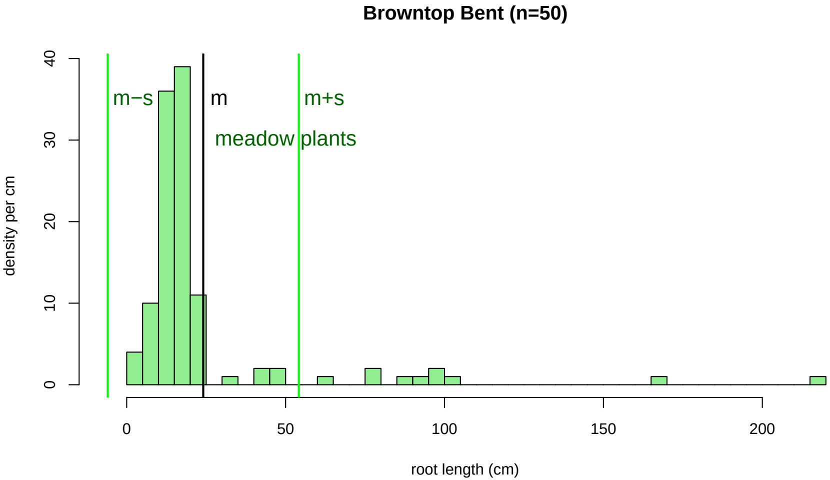
Kupfer
Cuprum

Hendrick met de Bles


Browntop Bent (n=50)
m−s
m
m+s
meadow plants
density per cm
0
10
20
30
40
0
50
100
150
200
root length (cm)



In etwa 2/3 der Wurzellängen innerhalb [m-sd,m+sd]????

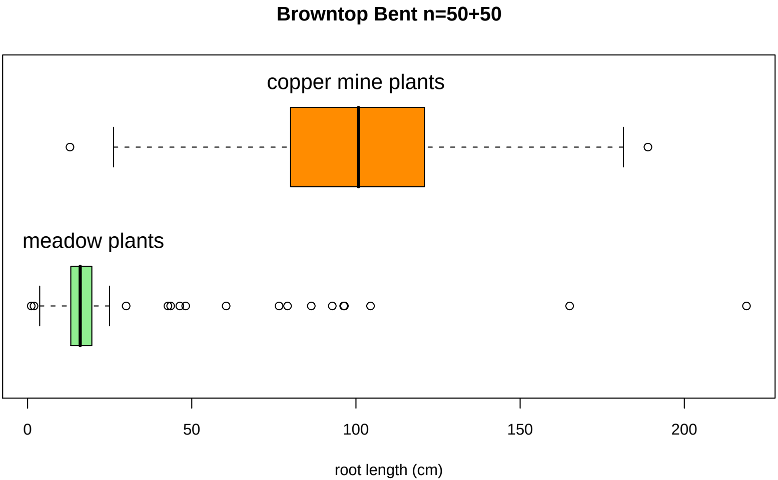


In etwa 2/3 der Wurzellängen innerhalb [m-sd,m+sd]????
Nein! Deutlich mehr.

Manche Verteilungen können nur mit mehr als zwei Variablen angemessen beschrieben werden.

Manche Verteilungen können nur mit mehr als zwei Variablen angemessen beschrieben werden.

z.B. mit den fünf Werten der Boxplots:
min, Q_1, median, Q_3, max


Browntop Bent n=50+50
copper mine plants
meadow plants
0
50
100
150
200
root length (cm)

Schlussfolgerung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den Mittelwert und die Standardabweichung angemessen beschrieben werden.

Schlussfolgerung

In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den Mittelwert und die Standardabweichung angemessen beschrieben werden.

Es gibt aber auch Ausnahmen. Also:
Immer die Daten erst mal graphisch untersuchen!

Schlussfolgerung

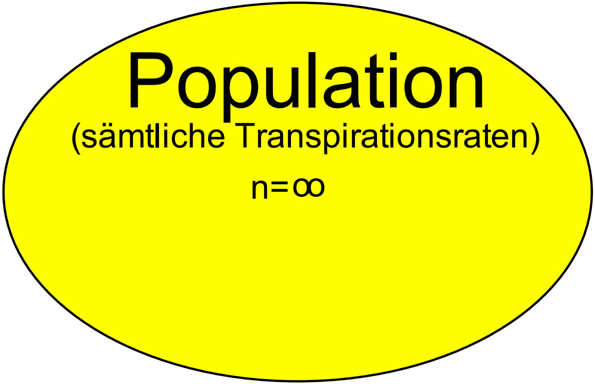
In der Biologie sind viele Datenverteilungen annähernd glockenförmig und können durch den Mittelwert und die Standardabweichung angemessen beschrieben werden.

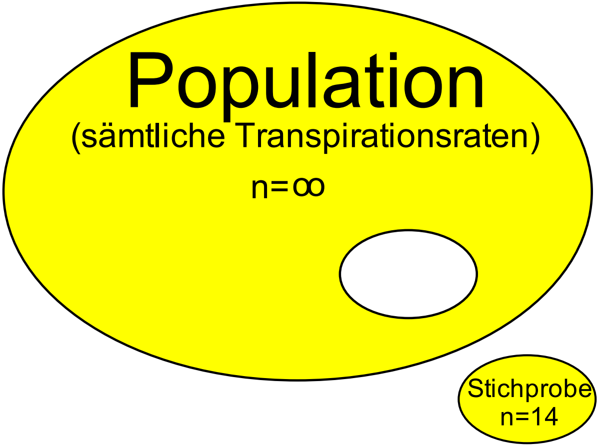
Es gibt aber auch Ausnahmen. Also: Immer die Daten erst mal graphisch untersuchen!

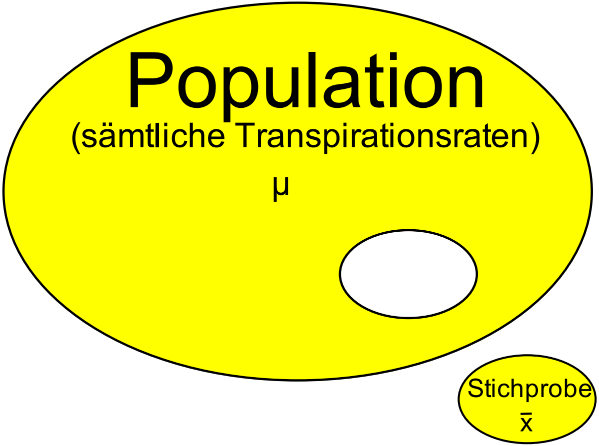
Verlassen sie sich niemals allein auf numerische Kenngrößen!

Inhalt

Inhalt


Population
(sämtliche Transpirationsraten)
n=∞


Population
(sämtliche Transpirationsraten)
n=∞
Stichprobe
n=14


Population
(sämtliche Transpirationsraten)
μ
Stichprobe
x̄

Wir schätzen
den Populationsmittelwert
μ
durch
den Stichprobenmittelwert
$\overline{x}$.

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\bar{x}$.

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\overline{x}$.

$\overline{x}$ hängt vom Zufall ab:

eine *Zufallsgröße*

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\overline{x}$.

$\overline{x}$ hängt vom Zufall ab:

eine *Zufallsgröße*

FRAGE: Wie variabel ist $\overline{x}$?

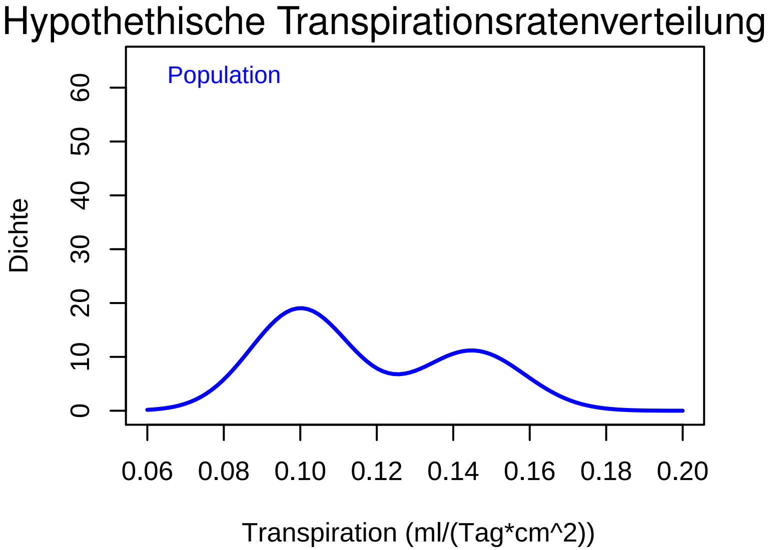
Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\overline{x}$.

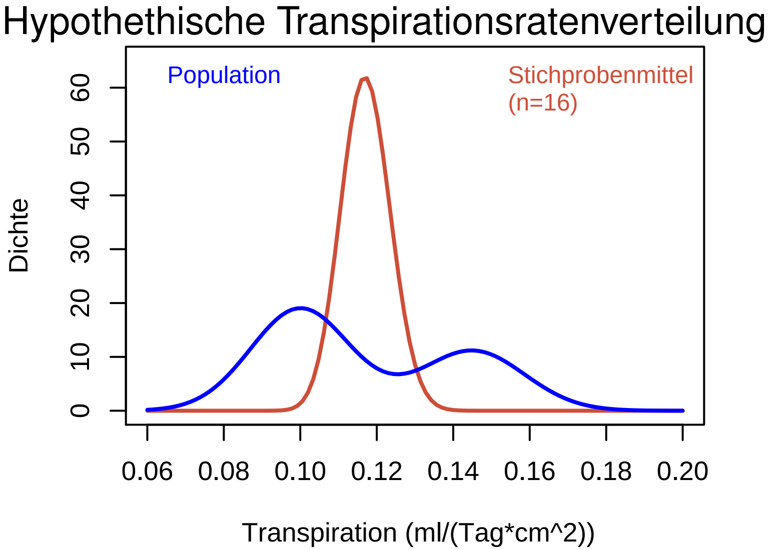
$\overline{x}$ hängt vom Zufall ab:

eine *Zufallsgröße*

FRAGE: Wie variabel ist $\overline{x}$?

Genauer: Wie weit weicht $\overline{x}$ typischerweise von μ ab?


Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Population
Dichte
0
10
20
30
40
50
60
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))


Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Population
Stichprobenmittel
(n=16)
Dichte
0
10
20
30
40
50
60
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Die allgemeine Regel

Die Standardabweichung
des Mittelwerts einer Stichprobe vom Umfang n

Die allgemeine Regel

Die Standardabweichung
des Mittelwerts einer Stichprobe vom Umfang n

ist
$1/\sqrt{n}$
mal
der Standardabweichung
der Population.

Die Standardabweichung der Population bezeichnet man mit

$$\sigma$$

(sigma).

Die Standardabweichung der Population bezeichnet man mit

σ

(sigma).

Die Regel schreibt man häufig so:

$$\sigma(\overline{x}) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$$

In der Praxis ist

σ

unbekannt.

In der Praxis ist

σ

unbekannt.

Es wird durch
die Stichproben-Standardabweichung s
geschätzt:

In der Praxis ist

σ

unbekannt.

Es wird durch
die Stichproben-Standardabweichung s
geschätzt:

$$\sigma = ??$$

In der Praxis ist

σ

unbekannt.

Es wird durch
die Stichproben-Standardabweichung s
geschätzt:

$$\sigma \approx s$$

Die geschätzte Standardabweichung von $\overline{x}$

$$s/\sqrt{n}$$

nennt man den *Standardfehler*.

Die geschätzte
Standardabweichung
von $\overline{x}$

$$s/\sqrt{n}$$

nennt man den

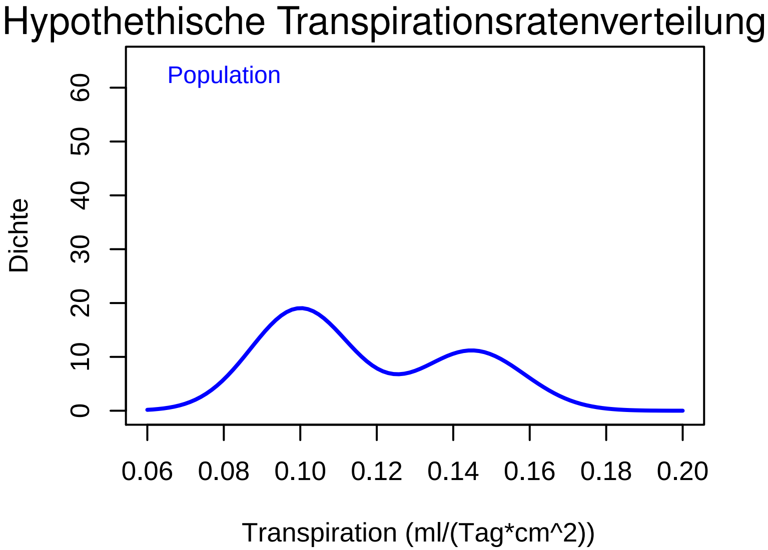
Standardfehler.

(Englisch: *standard error of the mean*, *standard error*, *SEM*)

Inhalt

Wir haben gesehen:

Auch wenn die Verteilung von
x mehrgipfelig
&
asymmetrisch
ist


Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Population
Dichte
0
10
20
30
40
50
60
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

ist die Verteilung von

$\overline{x}$

trotzdem

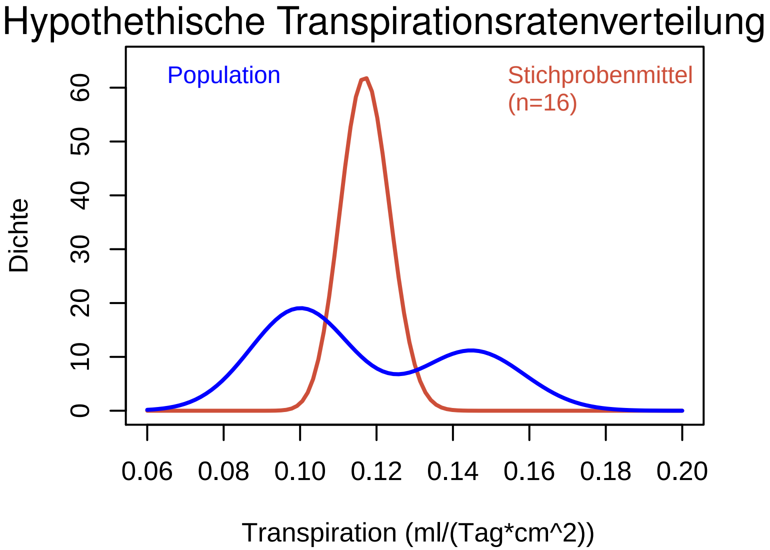
(annähernd)

eingipfelig

&

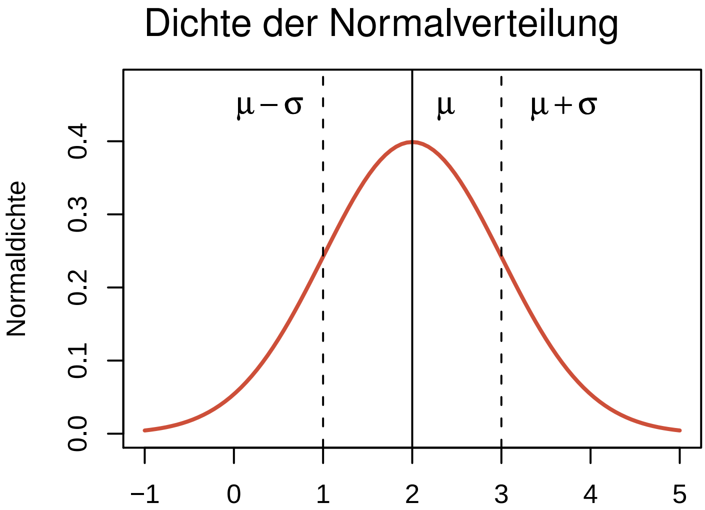
symmetrisch

(wenn der Stichprobenumfang n nur groß genug ist)

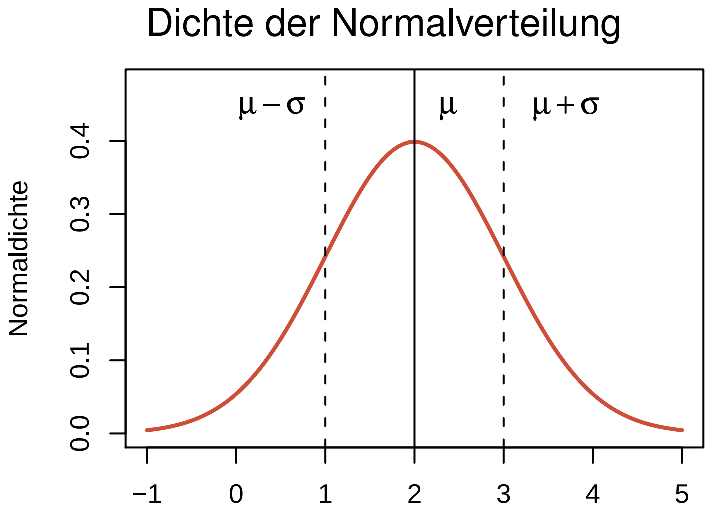

Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Population
Stichprobenmittel
(n=16)
Dichte
0
10
20
30
40
50
60
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Die Verteilung von $\overline{x}$
hat annähernd
eine ganz bestimmte Form:

die Normalverteilung.



Dichte der Normalverteilung
μ − σ
μ
μ + σ
Normaldichte
0.0
0.1
0.2
0.3
0.4
−1
0
1
2
3
4
5



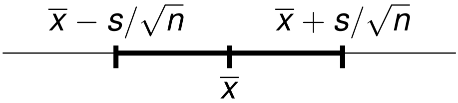
Die Normalverteilungsdichte heisst auch *Gauß'sche Glockenkurve*

Dichte der Normalverteilung

Die Normalverteilungsdichte heisst
auch *Gauß'sche Glockenkurve*
(nach Carl Friedrich Gauß, 1777-1855)

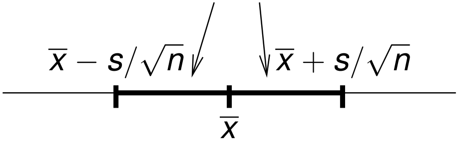
Wichtige Folgerung

Wir betrachten das Intervall



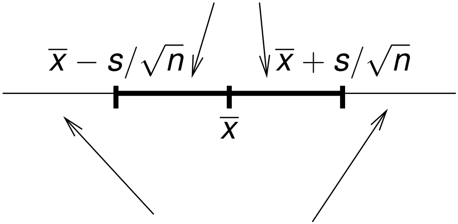
Wichtige Folgerung

Mit Wahrscheinlichkeit ca. $2/3$
liegt μ innerhalb dieses Intervalls



Wichtige Folgerung

Mit Wahrscheinlichkeit ca. $2/3$
liegt μ innerhalb dieses Intervalls



Mit Wahrscheinlichkeit ca. $1/3$
liegt μ ausserhalb des Intervalls

Demnach:

Es kommt durchaus vor, dass $\overline{x}$
von μ
um mehr als
$s/\sqrt{n}$ abweicht.

Inhalt

ANWENDUNG 1:
Welche Werte von μ sind plausibel?

ANWENDUNG 1:
Welche Werte von μ sind plausibel?

$$\bar{x} = 0{,}12$$
$$s/\sqrt{n} = 0{,}007$$

ANWENDUNG 1:
Welche Werte von μ sind plausibel?

$$\overline{x} = 0{,}12$$
$$s/\sqrt{n} = 0{,}007$$

Frage: Könnte es sein, dass
$\mu = 0{,}115$?

Antwort: Es ist gut möglich.

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\bar{x} - \mu = 0{,}120 - 0{,}115 = 0{,}005.$$

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\bar{x} - \mu = 0{,}120 - 0{,}115 = 0{,}005.$$

Standardfehler

$$s/\sqrt{n} = 0{,}007$$

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\bar{x} - \mu = 0{,}120 - 0{,}115 = 0{,}005.$$

Standardfehler

$$s/\sqrt{n} = 0{,}007$$

Abweichungen dieser Größe kommen häufig vor.

Antwort: Es ist gut möglich.

Abweichung

$$\bar{x} - \mu = 0{,}120 - 0{,}115 = 0{,}005.$$

Standardfehler

$$s/\sqrt{n} = 0{,}007$$

Abweichungen dieser Größe
kommen häufig vor.

(Die Frage, welche Abweichungen *nicht* mehr plausibel sind, untersuchen wir später.)

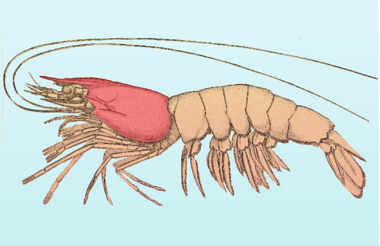
ANWENDUNG 2:
Vergleich von Mittelwerten

ANWENDUNG 2:
Vergleich von Mittelwerten

Beispiel: Springkrebs

Galathea squamifera
image (c) by Matthias Buschmann

Vergleich der Carapaxlänge:



(c): public domain

Galathea: Carapaxlänge in einer Stichprobe

Männchen:

$$\overline{x}_1 = 3{,}04 \text{ mm}$$
$$s_1 = 0{,}9 \text{ mm}$$
$$n_1 = 25$$

Weibchen:

$$\overline{x}_2 = 3{,}23 \text{ mm}$$
$$s_2 = 0{,}9 \text{ mm}$$
$$n_2 = 29$$

Die Weibchen
scheinen größer zu sein.

Die Weibchen
scheinen größer zu sein.

Ist das ernst zu nehmen?

Die Weibchen
scheinen größer zu sein.

Ist das ernst zu nehmen?

Oder könnte es nur Zufall sein?

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Männchen:

$$\overline{x}_1 = 3{,}04 \text{ mm}$$
$$s_1 = 0{,}9 \text{ mm}$$
$$n_1 = 25$$

$$s_1/\sqrt{n_1} = 0{,}18 \text{ [mm]}$$

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Männchen:

$$\bar{x}_1 = 3{,}04 \text{ mm}$$
$$s_1 = 0{,}9 \text{ mm}$$
$$n_1 = 25$$

$$s_1/\sqrt{n_1} = 0{,}18 \text{ [mm]}$$

Mit Schwankungen von $\pm 0{,}18$ (mm) in $\bar{x}_1$ müssen wir rechnen.

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Weibchen:

$$\overline{x}_2 = 3{,}23 \text{ mm}$$

$$s_2 = 0{,}9 \text{ mm}$$

$$n_2 = 29$$

$$s_2/\sqrt{n_2} = 0{,}17 \text{ [mm]}$$

Wie genau sind die beiden Mittelwerte?

Weibchen:

$$\bar{x}_2 = 3{,}23 \text{ mm}$$

$$s_2 = 0{,}9 \text{ mm}$$

$$n_2 = 29$$

$$s_2/\sqrt{n_2} = 0{,}17 \text{ [mm]}$$

Es ist nicht unwahrscheinlich, dass $\bar{x}_2$ um mehr als $\pm 0{,}17$ (mm) vom wahren Mittelwert abweicht.

Die Differenz der Mittelwerte

$$3{,}23 - 3{,}04 = \color{red}{0{,}19}\ [\text{mm}]$$

Die Differenz der Mittelwerte

$$3{,}23 - 3{,}04 = \color{red}{0{,}19}\ \text{[mm]}$$

ist kaum größer als
die zu erwartenden Schwankungen.

Die Differenz der Mittelwerte

$$3{,}23 - 3{,}04 = 0{,}19 \text{ [mm]}$$

ist kaum größer als
die zu erwartenden Schwankungen.

Es könnte also einfach Zufall sein,
dass

$$\overline{x}_2 > \overline{x}_1$$

GENAUER FORMULIERT:

Wenn in Wirklichkeit
die Populationsmittelwerte
gleich sind,

$$\mu_{\text{Weibchen}} = \mu_{\text{Männchen}}$$

GENAUER FORMULIERT:

Wenn in Wirklichkeit
die Populationsmittelwerte
gleich sind,

$$\mu_{\text{Weibchen}} = \mu_{\text{Männchen}}$$

kann es trotzdem leicht passieren,
dass die Stichprobenmittelwerte

$$\overline{x}_2 \text{ und } \overline{x}_1$$

so weit auseinander liegen.

Der Statistiker sagt:

Die Differenz
der Mittelwerte
ist
(statistisch)
nicht signifikant.

nicht signifikant

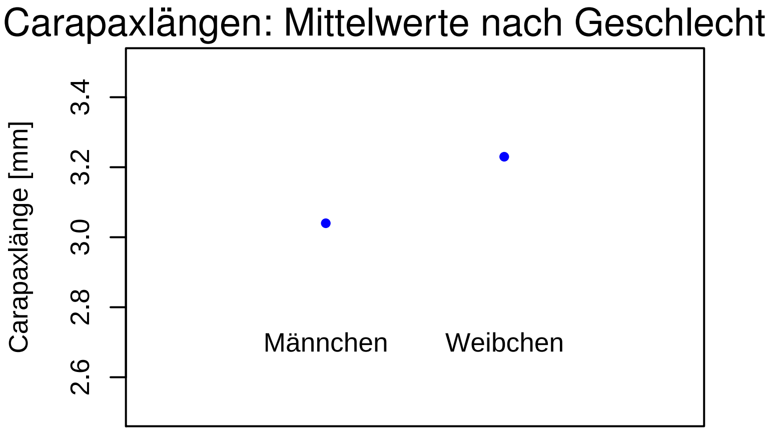
=

könnte Zufall sein

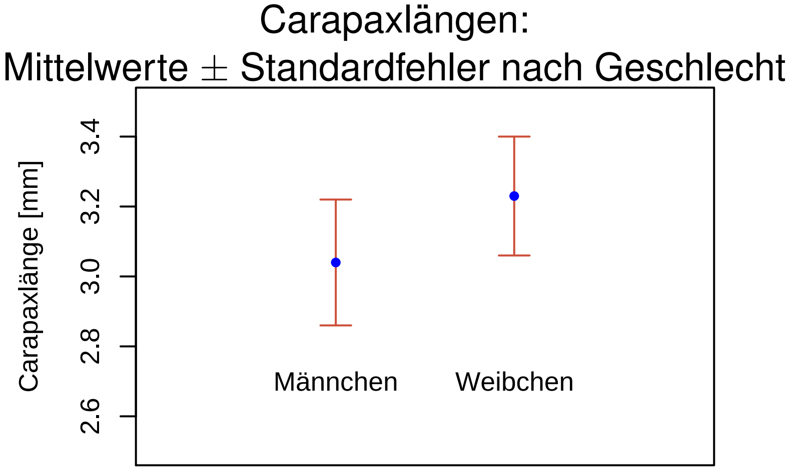
ANWENDUNG 3:

Wenn man Mittelwerte
graphisch darstellt,
sollte man auch
ihre Genauigkeit
($\pm s/\sqrt{n}$)
anzeigen.

Also nicht so:



sondern so:


Carapaxlängen:
Mittelwerte ± Standardfehler nach Geschlecht
Carapaxlänge [mm]
2.6
2.8
3.0
3.2
3.4
Männchen
Weibchen

ANWENDUNG 4:

Bei der Versuchsplanung:

ANWENDUNG 4:

Bei der Versuchsplanung:

Wieviele Beobachtungen brauche ich?

(Wie groß sollte die Stichprobenlänge n sein?)

Wenn man weiß, welche Genauigkeit
(Standardfehler $s/\sqrt{n}$)
für $\overline{x}$ man erreichen will,

Wenn man weiß, welche Genauigkeit
(Standardfehler $s/\sqrt{n}$)
für $\overline{x}$ man erreichen will,

und wenn man
(aus Erfahrung oder aus einem Vorversuch)
s ungefähr kennt,

Wenn man weiß, welche Genauigkeit
(Standardfehler $s/\sqrt{n}$)
für $\overline{x}$ man erreichen will,

und wenn man
(aus Erfahrung oder aus einem Vorversuch)
s ungefähr kennt,
dann kann man
das notwendige n ungefähr abschätzen:

$$s/\sqrt{n} = g$$

(g = gewünschter Standardfehler)

Beispiel:
Gestresste Transpirationswerte
bei einer anderen Hirse-Sorte:

$$\overline{x} = 0{,}18$$
$$s = 0{,}06$$
$$n = 13$$

Beispiel:
Gestresste Transpirationswerte
bei einer anderen Hirse-Sorte:

$$\overline{x} = 0{,}18$$
$$s = 0{,}06$$
$$n = 13$$

Nehmen wir an, der Versuch soll wiederholt werden
und man will
Standardfehler $\approx 0{,}01$ erreichen.

Beispiel:
Gestresste Transpirationswerte
bei einer anderen Hirse-Sorte:

$$\overline{x} = 0{,}18$$
$$s = 0{,}06$$
$$n = 13$$

Nehmen wir an, der Versuch soll wiederholt werden
und man will
Standardfehler $\approx 0{,}01$ erreichen.

Wie groß sollte n sein?

Lösung:

gewünscht:

$$s/\sqrt{n} \approx 0{,}01$$

Lösung:

gewünscht:

$$s/\sqrt{n} \approx 0{,}01$$

aus dem Vorversuch wissen wir:

$$s \approx 0{,}06,$$

Lösung:

gewünscht:

$$s/\sqrt{n} \approx 0{,}01$$

aus dem Vorversuch wissen wir:

$$s \approx 0{,}06,$$

$$\sqrt{n} \approx \frac{0{,}06}{0{,}01} = 6$$

Lösung:

gewünscht:

$$s/\sqrt{n} \approx 0{,}01$$

aus dem Vorversuch wissen wir:

$$s \approx 0{,}06,$$

$$\sqrt{n} \approx \frac{0{,}06}{0{,}01} = 6$$

$$n \approx 36$$

Inhalt

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße
  mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.
- Man schätzt die Standardabweichung von $\overline{x}$ mit $s/\sqrt{n}$.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße
  mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.
- Man schätzt die Standardabweichung von $\overline{x}$ mit $s/\sqrt{n}$.
- $s/\sqrt{n}$ nennt man den Standardfehler.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße
  mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.
- Man schätzt die Standardabweichung von $\overline{x}$ mit $s/\sqrt{n}$.
- $s/\sqrt{n}$ nennt man den Standardfehler.
- Schwankungen in $\overline{x}$ von der Größe $s/\sqrt{n}$ kommen häufig vor.

ZUSAMMENFASSUNG

- Nehmen wir an, eine Population hat Mittelwert μ und Standardabweichung σ.
- Aus dieser Population ziehen wir eine Zufallsstichprobe vom Umfang n, mit Stichprobenmittelwert $\overline{x}$.
- $\overline{x}$ ist eine Zufallsgröße
  mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma/\sqrt{n}$.
- Man schätzt die Standardabweichung von $\overline{x}$ mit $s/\sqrt{n}$.
- $s/\sqrt{n}$ nennt man den Standardfehler.
- Schwankungen in $\overline{x}$ von der Größe $s/\sqrt{n}$ kommen häufig vor.

  Solche Schwankungen sind „nicht signifikant“: sie könnten Zufall sein.