Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Biologen
2. Der Standardfehler

Martin Hutzenthaler & Dirk Metzler

http://www.zi.biologie.uni-muenchen.de/evol/StatGen.html

22. April 2010

1. Der Standardfehler
   - Ein Versuch
   - Ein allgemeiner Rahmen

Inhalt

Inhalt

Hirse

Bild: *Panicum miliaceum*

(copyright expired)

Ein Versuch

Versuchsaufbau:

14 Hirse-Pflanzen von einer Sorte wurden 7 Tage lang nicht mehr gegossen („trockengestresst“).

Ein Versuch

Versuchsaufbau:

14 Hirse-Pflanzen von einer Sorte
wurden 7 Tage lang nicht mehr gegossen
(„trockengestresst“).

An den letzten drei Tagen
wurde die Wasserabgabe der Pflanzen
durch Wägung ermittelt
und ein Mittelwert über drei Tage errechnet.

Ein Versuch

Versuchsaufbau:

14 Hirse-Pflanzen von einer Sorte
wurden 7 Tage lang nicht mehr gegossen
(„trockengestresst“).

An den letzten drei Tagen
wurde die Wasserabgabe der Pflanzen
durch Wägung ermittelt
und ein Mittelwert über drei Tage errechnet.

Zum Schluß des Versuchs
wurden die Pflanzen abgeschnitten
und die Blattfläche bestimmt.

Transpirationsrate

=

(Wasserabgabe pro Tag)/Blattfläche

Transpirationsrate

=

(Wasserabgabe pro Tag)/Blattfläche

$$\left[\frac{\mathrm{ml}}{\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{Tag}}\right]$$

Ein Ziel des Versuchs:
die mittlere Transpirationsrate

(für diese Hirsesorte unter diesen Bedingungen)

zu bestimmen.

Ein Ziel des Versuchs:
die mittlere Transpirationsrate μ

(für diese Hirsesorte unter diesen Bedingungen)

zu bestimmen.

Ein Ziel des Versuchs:
die mittlere Transpirationsrate μ

(für diese Hirsesorte unter diesen Bedingungen)

zu bestimmen.

In einem großen Versuch mit sehr vielen Pflanzen könnte man μ beliebig genau bestimmen.

Ein Ziel des Versuchs:
die mittlere Transpirationsrate μ

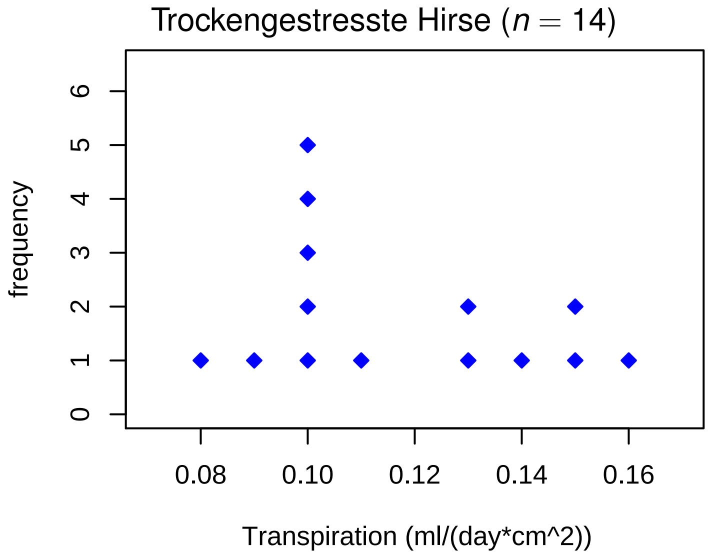
(für diese Hirsesorte unter diesen Bedingungen)

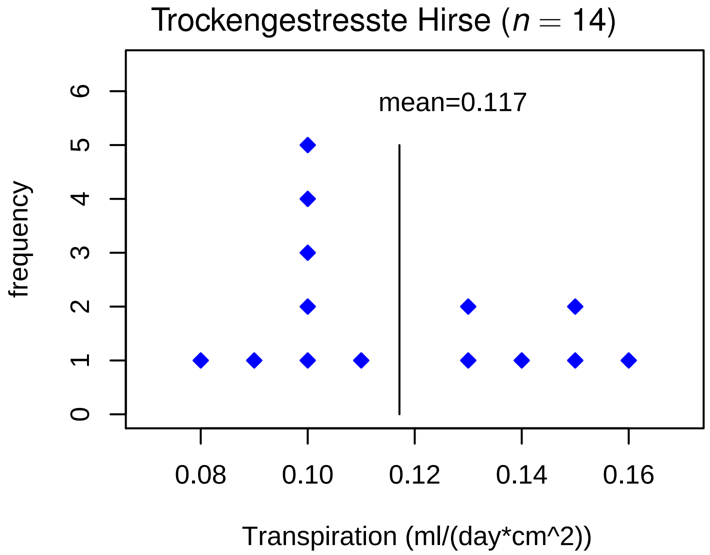
zu bestimmen.

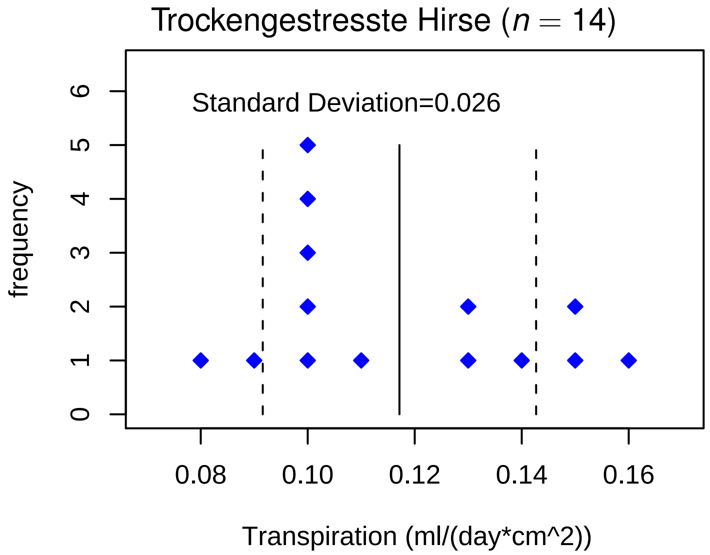
In einem großen Versuch mit sehr vielen Pflanzen könnte man μ beliebig genau bestimmen.

FRAGE:
Wie genau ist die Schätzung von μ
in diesem kleinen ($n = 14$) Versuch?

Ergebnisse des Versuchs:


Trockengestresste Hirse ($n = 14$)
frequency
0
1
2
3
4
5
6
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
Transpiration (ml/(day*cm^2))


Trockengestresste Hirse ($n = 14$)
mean=0.117
frequency
0
1
2
3
4
5
6
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
Transpiration (ml/(day*cm^2))


Trockengestresste Hirse ($n = 14$)
Standard Deviation=0.026
frequency
0
1
2
3
4
5
6
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
Transpiration (ml/(day*cm^2))

Transpirationsdaten: $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$

$$\overline{x} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_{14})/14$$

Transpirationsdaten: $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$

$$\overline{x} = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{14}\right)/14 \; = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i$$

Transpirationsdaten: $x_1, x_2, \ldots, x_{14}$

$$\bar{x} = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_{14}\right)/14 \; = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14} x_i$$

$$\bar{x} = 0{,}117$$

Unsere Schätzung:

$$\mu \approx 0{,}117$$

Unsere Schätzung:

$$\mu \approx 0{,}117$$

Wie genau ist diese Schätzung?

Unsere Schätzung:

$\mu \approx 0{,}117$

Wie genau ist diese Schätzung?

Wie weit weicht der Schätzwert $\overline{x}$ von dem wahren Mittelwert μ ab?

Inhalt

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,
sondern
100 mal,

Ein allgemeiner Rahmen

Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,
sondern
100 mal,
1.000 mal,

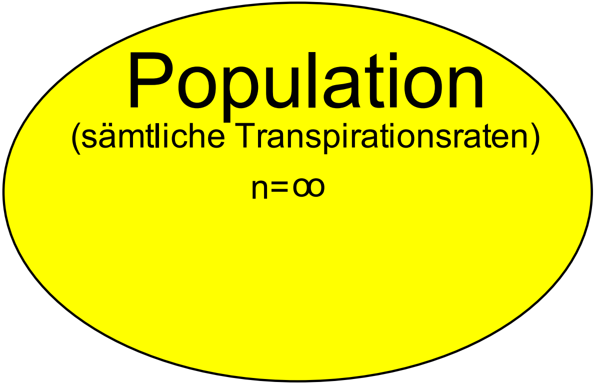
Ein allgemeiner Rahmen

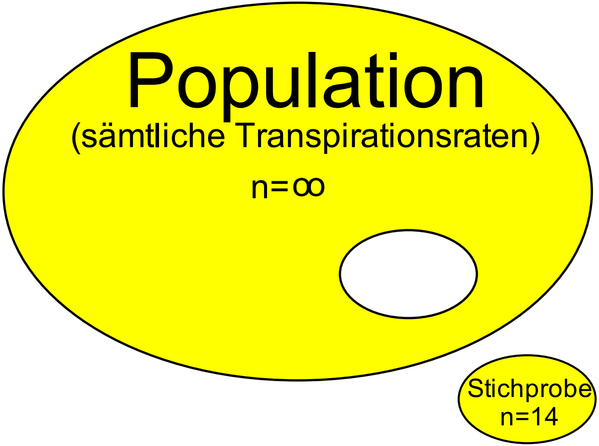
Wir stellen uns vor,
wir hätten den Versuch nicht 14 mal,
sondern
100 mal,
1.000 mal,
1.000.000 mal
wiederholt.

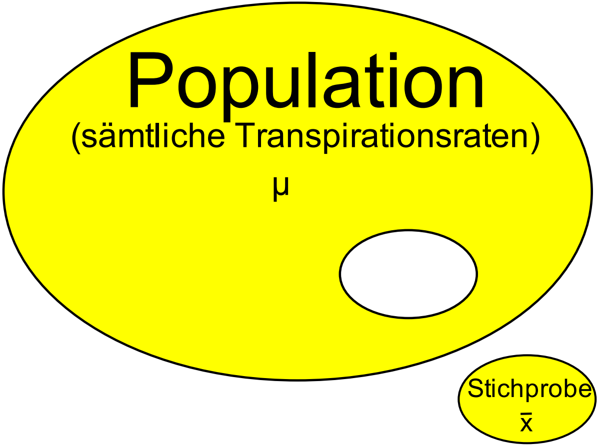
Unsere 14 Transpirationswerte
betrachten wir als

zufällige Stichprobe

aus dieser großen Population
von möglichen Werten.


Population
(sämtliche Transpirationsraten)
n=∞


Population
(sämtliche Transpirationsraten)
n=∞
Stichprobe
n=14


Population
(sämtliche Transpirationsraten)
μ
Stichprobe
x̄

Wir schätzen
den Populationsmittelwert
μ
durch
den Stichprobenmittelwert
$\overline{x}$.

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\bar{x}$.

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\overline{x}$.

$\overline{x}$ hängt vom Zufall ab:

eine *Zufallsgröße*

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\overline{x}$.

$\overline{x}$ hängt vom Zufall ab:

eine *Zufallsgröße*

FRAGE: Wie variabel ist $\overline{x}$?

Jede neue Stichprobe liefert einen neuen Wert von $\overline{x}$.

$\overline{x}$ hängt vom Zufall ab:
eine *Zufallsgröße*

FRAGE: Wie variabel ist $\overline{x}$?

Genauer: Wie weit weicht $\overline{x}$ typischerweise von μ ab?

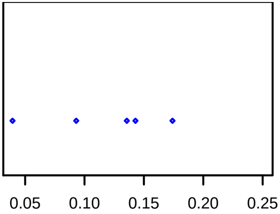
$$\overline{x} = \left(x_1 + x_2 + \cdots + x_n\right)/n$$

Wovon hängt die Variabilität von $\overline{x}$ ab?

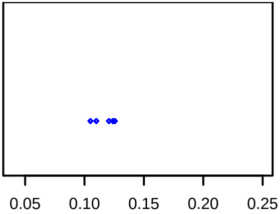
1.

von der
Variabilität
der einzelnen
Beobachtungen

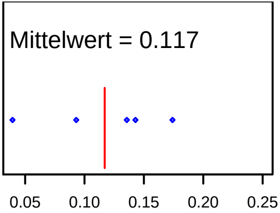
$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$



x variiert viel

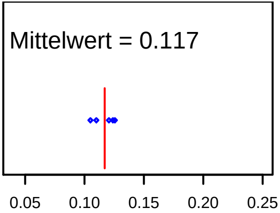


x variiert wenig



x variiert viel

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ variiert viel



x variiert wenig

$\Rightarrow$ $\bar{x}$ variiert wenig

2.

vom
Stichprobenumfang
n

2.

vom
Stichprobenumfang
n

Je größer n,
desto kleiner
die Variabilität von $\bar{x}$.

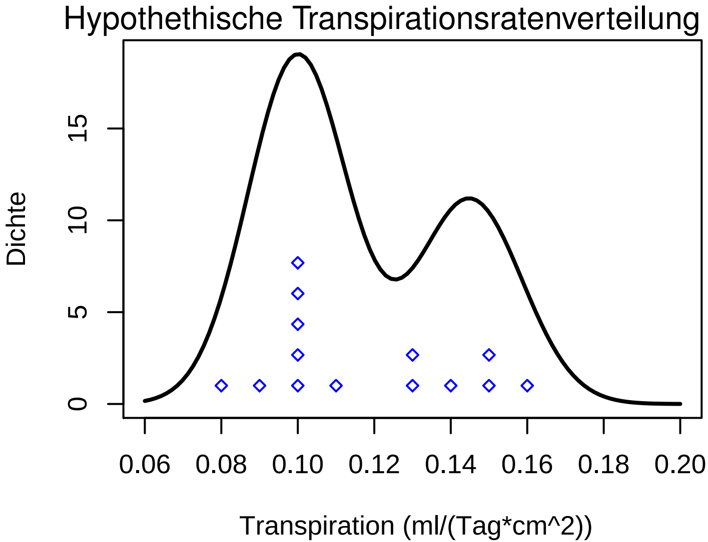
Um diese Abhängigkeit
zu untersuchen,
machen wir ein

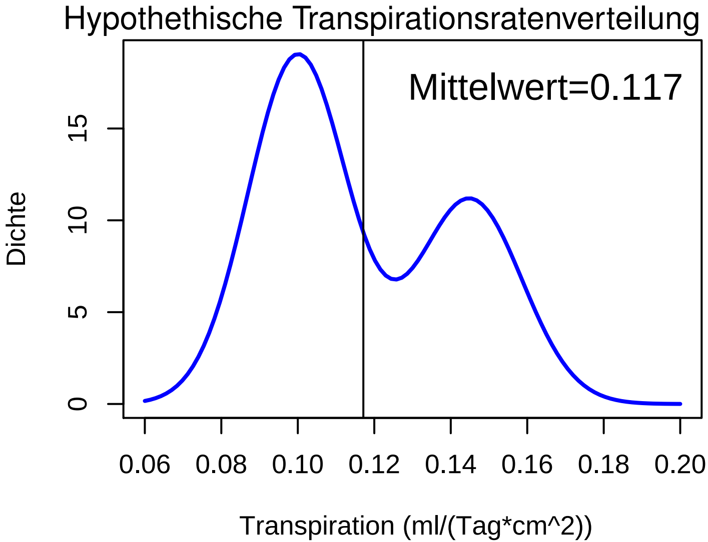
(Computer-)Experiment.

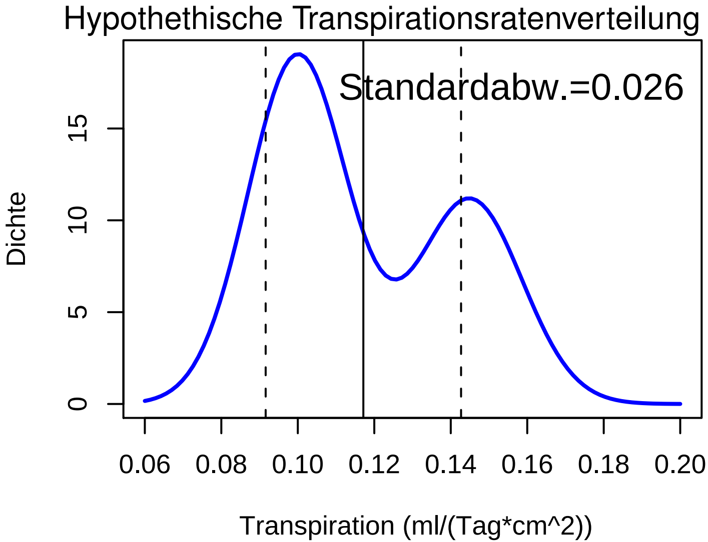
Experiment:

Wir nehmen eine Population,
ziehen Stichproben,
und schauen,
wie $\overline{x}$ variiert.

Nehmen wir an,
die Verteilung
aller möglichen Transpirationswerte
sieht folgendermaßen aus:

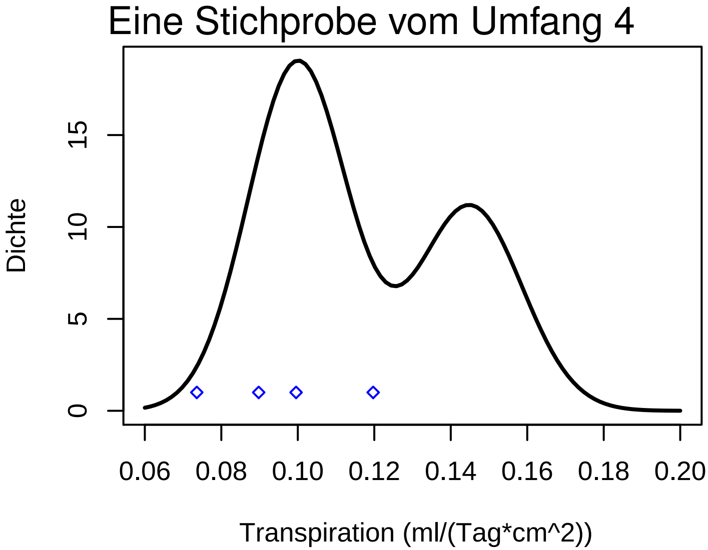

Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

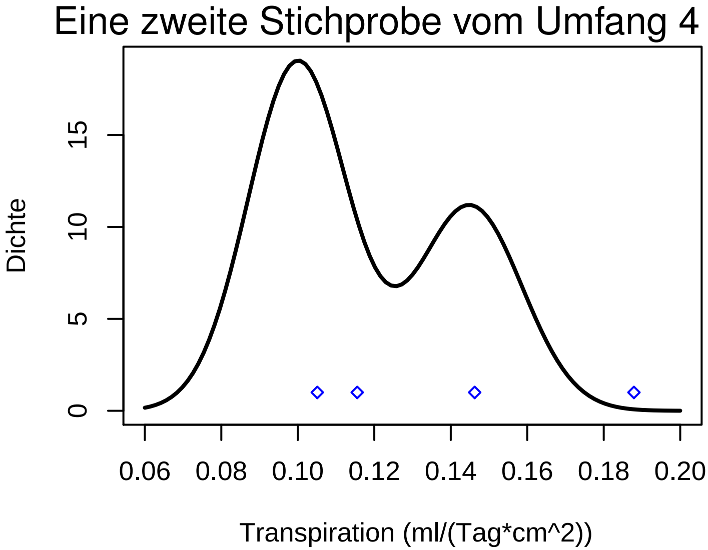

Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Mittelwert=0.117
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

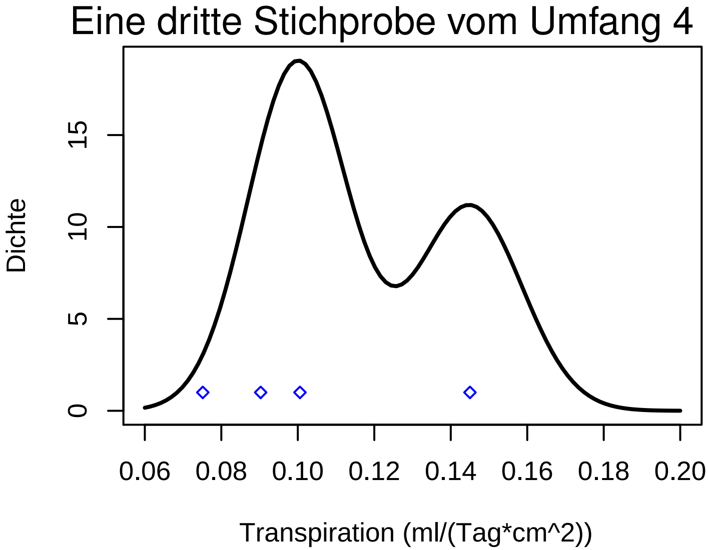

Hypothethische Transpirationsratenverteilung
Standardabw.=0.026
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Wir beginnen mit kleinen Stichproben:

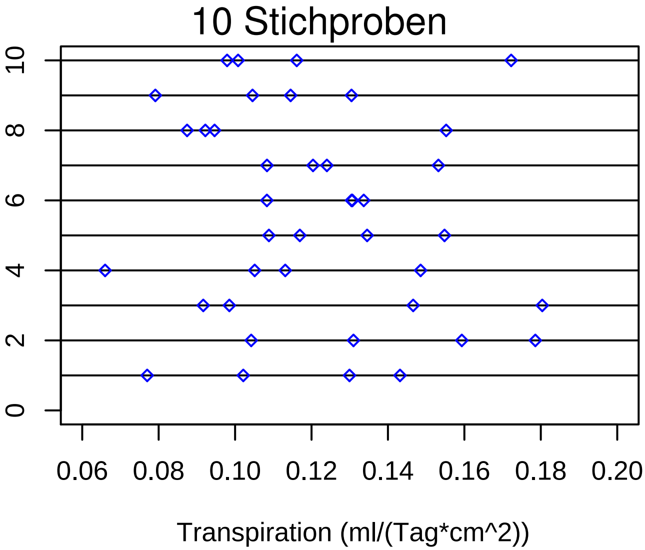
$$n = 4$$


Eine Stichprobe vom Umfang 4
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

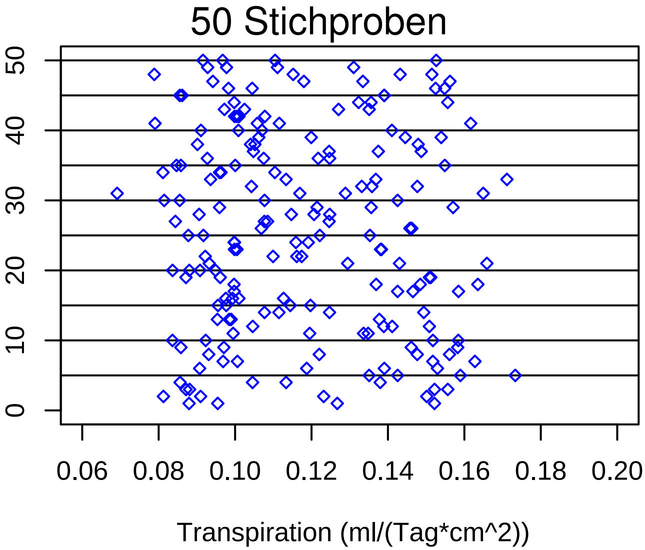

Eine zweite Stichprobe vom Umfang 4
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))


Eine dritte Stichprobe vom Umfang 4
Dichte
0
5
10
15
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

10 Stichproben


10 Stichproben
0
2
4
6
8
10
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

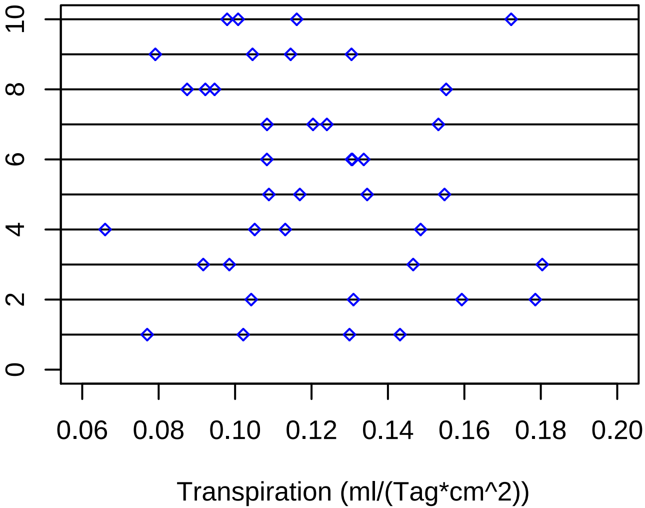
50 Stichproben


50 Stichproben
0
10
20
30
40
50
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

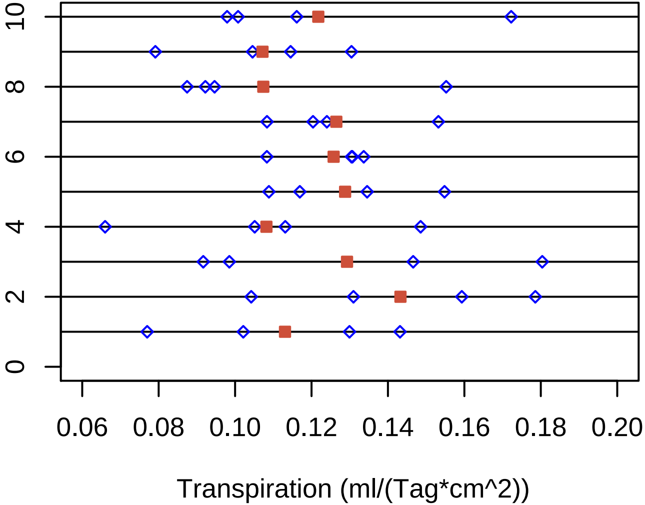
Wie variabel sind

die Stichprobenmittelwerte?

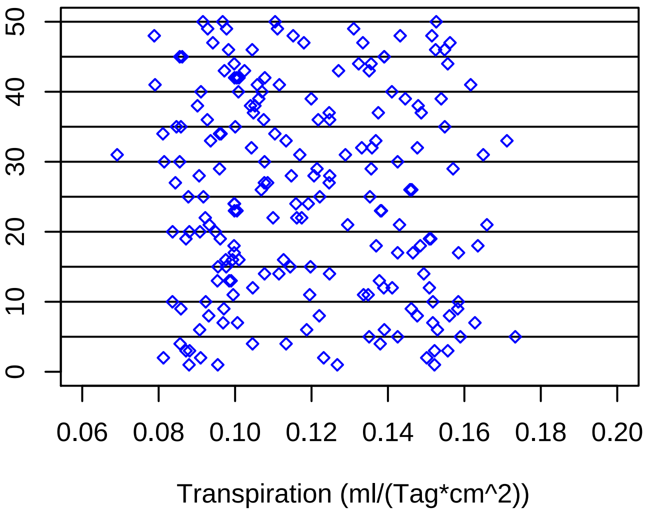
10 Stichproben vom Umfang 4



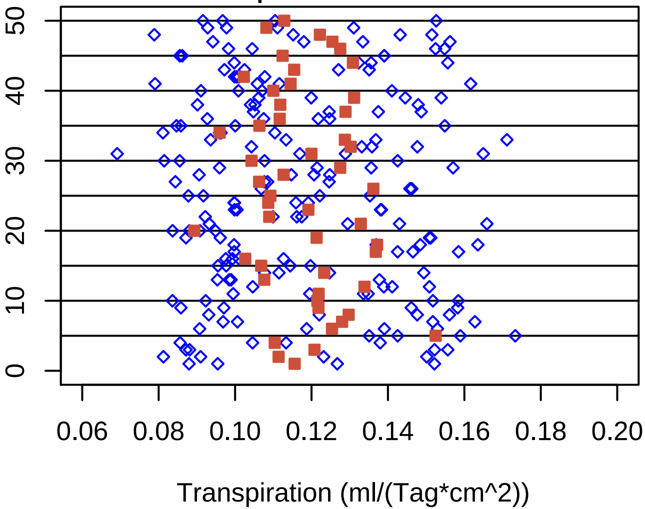
10 Stichproben vom Umfang 4 und die zugehörigen Stichprobenmittel

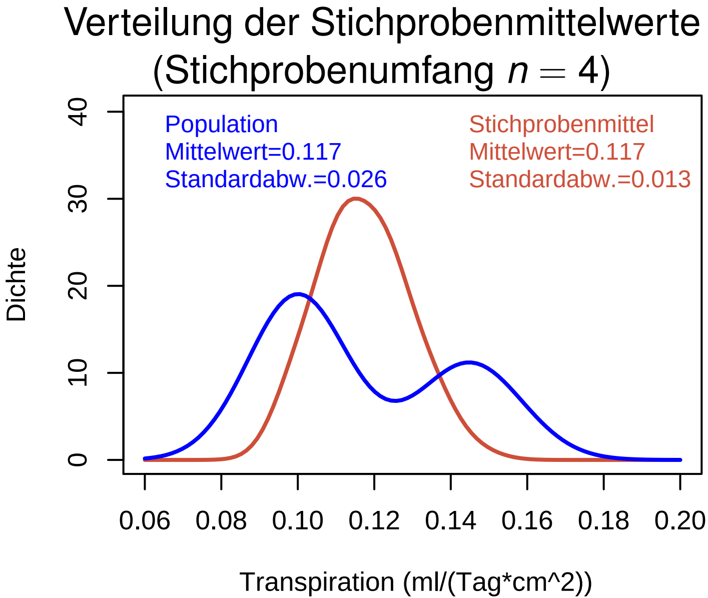


50 Stichproben vom Umfang 4



50 Stichproben vom Umfang 4 und die zugehörigen Stichprobenmittel




Verteilung der Stichprobenmittelwerte
(Stichprobenumfang $n = 4$)
Population
Mittelwert=0.117
Standardabw.=0.026
Stichprobenmittel
Mittelwert=0.117
Standardabw.=0.013
Dichte
0
10
20
30
40
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Population:

Standardabweichung = 0,026

Population:

Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 4$):

Standardabweichung = 0,013

Population:

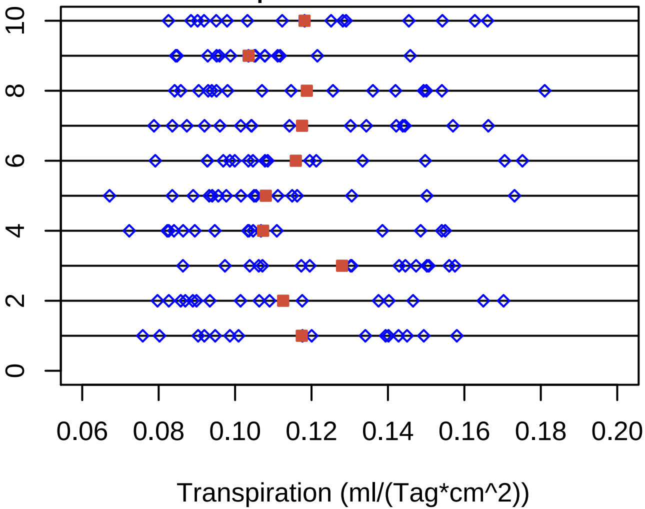
Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 4$):

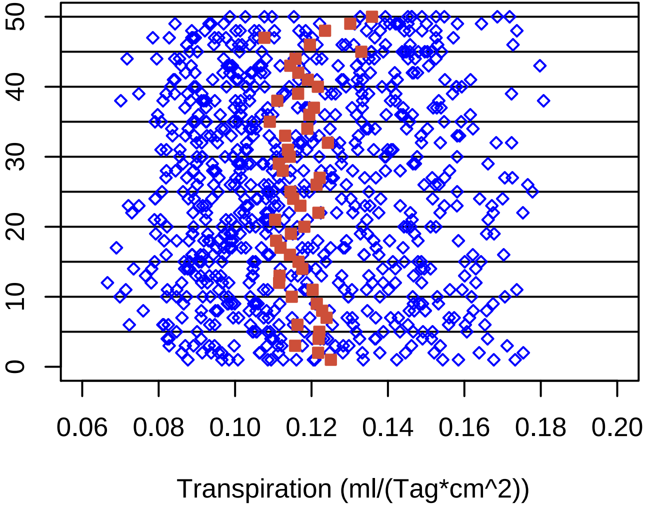
$$\begin{aligned} \text{Standardabweichung} &= 0{,}013 \\ &= 0{,}026/\sqrt{4} \end{aligned}$$

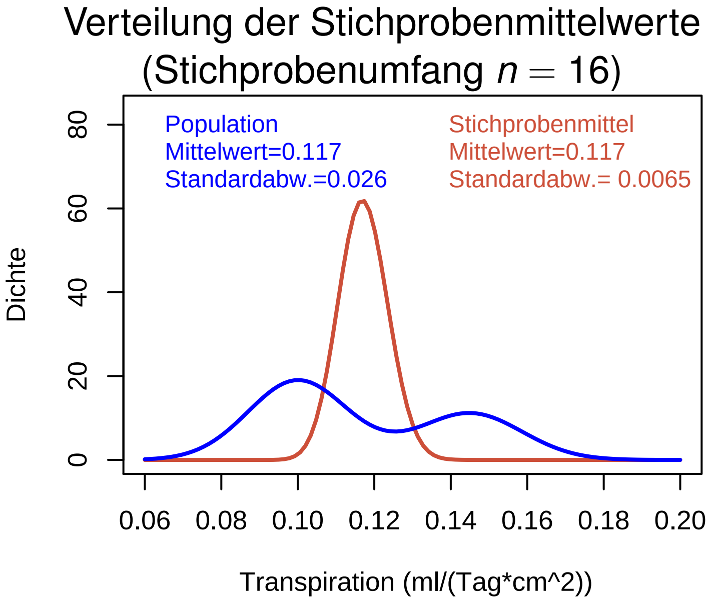
Erhöhen wir
den Stichprobenumfang
von
4
auf
16

10 Stichproben vom Umfang 16 und die zugehörigen Stichprobenmittel



50 Stichproben vom Umfang 16 und die zugehörigen Stichprobenmittel




Verteilung der Stichprobenmittelwerte
(Stichprobenumfang $n = 16$)
Population
Mittelwert=0.117
Standardabw.=0.026
Stichprobenmittel
Mittelwert=0.117
Standardabw.= 0.0065
Dichte
0
20
40
60
80
0.06
0.08
0.10
0.12
0.14
0.16
0.18
0.20
Transpiration (ml/(Tag*cm^2))

Population:

Standardabweichung = 0,026

Population:

Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 16$):

Standardabweichung = 0,0065

Population:

Standardabweichung = 0,026

Stichprobenmittelwerte ($n = 16$):

$$\begin{aligned} \text{Standardabweichung} &= 0{,}0065 \\ &= 0{,}026/\sqrt{16} \end{aligned}$$

Die allgemeine Regel

Die Standardabweichung
des Mittelwerts einer Stichprobe vom Umfang n

Die allgemeine Regel

Die Standardabweichung
des Mittelwerts einer Stichprobe vom Umfang n

ist
$1/\sqrt{n}$
mal
der Standardabweichung
der Population.