# Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Biologen
# 7. Konfidenzintervalle

Martin Hutzenthaler & Dirk Metzler

http://evol.bio.lmu.de/_statgen

1. Juni 2009

1. Konfidenzintervalle für Erwartungswerte
   - Beispiel: Carapaxlänge des Springkrebses
   - Theorie
2. Konfidenzintervalle für Wahrscheinlichkeiten
   - Beispiel: Porzellankrebs
   - Theorie
   - Beispiel: Porzellankrebs
   - Beispiel: Stockente
   - Anmerkungen

# Inhalt

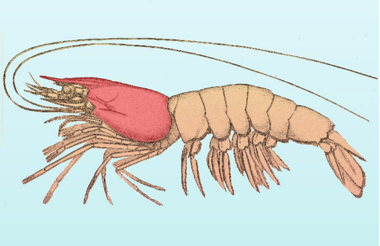
# Inhalt

# Beispiel: Springkrebs

*Galathea squamifera*

image (c) by Matthias Buschmann

# Carapaxlänge:



(c): public domain

Wie groß ist die mittlere Carapaxlänge des weiblichen Springkrebses?

## Wie groß ist die mittlere Carapaxlänge des weiblichen Springkrebses?

Alle weiblichen Springkrebse (also die Grundgesamtheit) zu vermessen, ist zu aufwändig.

Wie groß ist die mittlere Carapaxlänge
des weiblichen Springkrebses?

Alle weiblichen Springkrebse (also die Grundgesamtheit)
zu vermessen, ist zu aufwändig.

Idee: Aus einer Stichprobe läßt sich
die mittlere Carapaxlänge schätzen.

Wie groß ist die mittlere Carapaxlänge
des weiblichen Springkrebses?

Alle weiblichen Springkrebse (also die Grundgesamtheit)
zu vermessen, ist zu aufwändig.

Idee: Aus einer Stichprobe läßt sich
die mittlere Carapaxlänge schätzen.

Wie genau ist diese Schätzung?

Wie groß ist die mittlere Carapaxlänge
des weiblichen Springkrebses?

Alle weiblichen Springkrebse (also die Grundgesamtheit)
zu vermessen, ist zu aufwändig.

Idee: Aus einer Stichprobe läßt sich
die mittlere Carapaxlänge schätzen.

Wie genau ist diese Schätzung?

Ziel: Ein Intervall, in dem der Mittelwert der Carapaxlängen aller
weiblichen Springkrebse mit hoher Wahrscheinlichkeit liegt.

Wie groß ist die mittlere Carapaxlänge
des weiblichen Springkrebses?

Alle weiblichen Springkrebse (also die Grundgesamtheit)
zu vermessen, ist zu aufwändig.

Idee: Aus einer Stichprobe läßt sich
die mittlere Carapaxlänge schätzen.

Wie genau ist diese Schätzung?

Ziel: Ein Intervall, in dem der Mittelwert der Carapaxlängen aller
weiblichen Springkrebse mit hoher Wahrscheinlichkeit liegt.

Dieses Intervall nennen wir
Konfidenzintervall oder Vertrauensbereich
für den wahren Wert.

Galathea: Carapaxlänge
in einer Stichprobe

Weibchen:

$$\overline{x} = 3.23 \text{ mm}$$

$$sd(x) = 0.9 \text{ mm}$$

$$n = 29$$

$$sem(x) = \frac{sd(x)}{\sqrt{n}} = \frac{0.9}{\sqrt{29}} = 0.17 \qquad (= sd(\overline{x}))$$

Wir kennen bereits folgende Faustformeln:

- $2/3$-Faustformel: Der wahre Mittelwert liegt im Intervall

$$[\overline{x} - sem(x), \overline{x} + sem(x)]$$

mit Wahrscheinlichkeit nahe bei $2/3$

Wir kennen bereits folgende Faustformeln:

- $2/3$-Faustformel: Der wahre Mittelwert liegt im Intervall

  $$[\overline{x} - sem(x), \overline{x} + sem(x)]$$

  mit Wahrscheinlichkeit nahe bei $2/3$
- $95\%$-Faustformel: Der wahre Mittelwert liegt im Intervall

  $$[\overline{x} - 2 * sem(x), \overline{x} + 2 * sem(x)]$$

  mit Wahrscheinlichkeit nahe bei 95%

Wir kennen bereits folgende Faustformeln:

- $2/3$-Faustformel: Der wahre Mittelwert liegt im Intervall

$$\left[\overline{x} - sem(x), \overline{x} + sem(x)\right]$$

  mit Wahrscheinlichkeit nahe bei $2/3$

- $95\%$-Faustformel: Der wahre Mittelwert liegt im Intervall

$$\left[\overline{x} - 2 * sem(x), \overline{x} + 2 * sem(x)\right]$$

  mit Wahrscheinlichkeit nahe bei $95\%$

Nun exakt: Sei $t_{5\%}$ `<- -qt(0.025,length(x)-1)`. Dann liegt der wahre Mittelwert mit Wahrscheinlichkeit 95% im Intervall

$$\left[\overline{x} - t_{5\%} * sem(x), \overline{x} + t_{5\%} * sem(x)\right]$$

Zur Begründung siehe nächster Abschnitt.

Setzt man die Zahlenwerte $\overline{x} = 3.23$, $t_{5\%} = 2.05$ und $\mathrm{sem}(x) = 0.17$ in

$$\left[\overline{x} - t_{5\%} * sem(x), \overline{x} + t_{5\%} * sem(x)\right]$$

ein, so erhält man das Konfidenzintervall

$$[2.88, 3.58]$$

für den wahren Mittelwert zum Irrtumsniveau 5%.

# Inhalt

# Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert

Ziel: Bestimme das Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert zum Irrtumsniveau $\alpha$

# Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert

Ziel: Bestimme das Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert zum Irrtumsniveau $\alpha$

Das Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert zum Irrtumsniveau $\alpha$ ist ein aus den Daten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätztes (zufälliges) Intervall

$$\left[\underline{I}(x), \overline{I}(x)\right]$$

mit folgender Eigenschaft: Ist der wahre Mittelwert gleich $\mu$ und ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit (mit Mittelwert $\mu$), so gilt

$$\Pr\left(\mu \in \left[\underline{I}(x), \overline{I}(x)\right]\right) \geq 1 - \alpha$$

# Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert

Ziel: Bestimme das Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert zum Irrtumsniveau $\alpha$

Das Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert zum Irrtumsniveau $\alpha$ ist ein aus den Daten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätztes (zufälliges) Intervall

$$\left[\underline{I}(x), \overline{I}(x)\right]$$

mit folgender Eigenschaft: Ist der wahre Mittelwert gleich $\mu$ und ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit (mit Mittelwert $\mu$), so gilt

$$\Pr\left(\mu \in \left[\underline{I}(x), \overline{I}(x)\right]\right) \geq 1 - \alpha$$

Selbstverständlich wollen wir das Konfidenzintervall möglichst klein wählen.

# Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert

Lösung: Wir wissen bereits (->Normalapproximation), dass die t-Statistik

$$t := \frac{\overline{x} - \mu}{\mathrm{sem}(x)}$$

annähernd Student-verteilt ist mit `length(x)-1` Freiheitsgraden (wenn `length(x)` groß genug ist).

# Konfidenzintervall für den wahren Mittelwert

Lösung: Wir wissen bereits (->Normalapproximation), dass die t-Statistik

$$t := \frac{\overline{x} - \mu}{\mathrm{sem}(x)}$$

annähernd Student-verteilt ist mit `length(x)-1` Freiheitsgraden (wenn `length(x)` groß genug ist).

Sei $t_\alpha$ `<- -qt(`$\alpha/2$`,length(x)-1)` das $\alpha/2$-Quantil der Student-Verteilung mit `length(x)-1` Freiheitsgraden. Dann ist

$$\left[\overline{x} - t_\alpha * sem(x), \overline{x} + t_\alpha * sem(x)\right]$$

das Konfidenzintervall zum Irrtumsniveau $\alpha$.

Begründung:

$$
\begin{aligned}
&\Pr\left(\mu \in \left[\overline{x} - t_\alpha * \mathrm{sem}(x), \overline{x} + t_\alpha * \mathrm{sem}(x)\right]\right)\\
&\quad = \Pr\left(\mu - \overline{x} \in \left[-t_\alpha * \mathrm{sem}(x), t_\alpha * \mathrm{sem}(x)\right]\right)\\
&\quad = \Pr\left(\frac{\mu - \overline{x}}{\mathrm{sem}(x)} \in \left[-t_\alpha, t_\alpha\right]\right)\\
&\quad = \Pr\left(\left|\frac{\mu - \overline{x}}{\mathrm{sem}(x)}\right| \le t_\alpha\right)\\
&\quad = \Pr\left(|t| \le t_\alpha\right)\\
&\quad = 1 - \alpha
\end{aligned}
$$

Beachte: $t_\alpha$ wird gerade so gewählt, dass die letzte Gleichung richtig ist.

# Konfidenzintervall allgemein

Sei $\theta$ ein Parameter der zu Grunde liegenden Verteilung.

# Konfidenzintervall allgemein

Sei $\theta$ ein Parameter der zu Grunde liegenden Verteilung.

Das Konfidenzintervall für den Parameter $\theta$ zum Irrtumsniveau $\alpha$ ist ein aus den Daten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätztes (zufälliges) Intervall

$$\left[\underline{I}(x), \overline{I}(x)\right]$$

mit folgender Eigenschaft: Ist der wahre Parameter gleich $\theta$ und ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit (mit Parameter $\theta$), so gilt

$$\Pr\left(\theta \in \left[\underline{I}(x), \overline{I}(x)\right]\right) \geq 1 - \alpha$$

# Konfidenzintervall allgemein

Sei $\theta$ ein Parameter der zu Grunde liegenden Verteilung.

Das Konfidenzintervall für den Parameter $\theta$ zum Irrtumsniveau $\alpha$ ist ein aus den Daten $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätztes (zufälliges) Intervall

$$\left[\underline{I}(x), \bar{I}(x)\right]$$

mit folgender Eigenschaft: Ist der wahre Parameter gleich $\theta$ und ist $(x_1, \ldots, x_n)$ eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit (mit Parameter $\theta$), so gilt

$$\Pr\left(\theta \in \left[\underline{I}(x), \bar{I}(x)\right]\right) \geq 1 - \alpha$$

Wie das Konfidenzintervall im Allgemeinen aussieht, ist unbekannt.

# Inhalt

# Inhalt

(c): public domain

Familie: *Porcellanidae*

In einem Fang vom 21.02.1992 in der Helgoländer Tiefe Rinne waren 23 Weibchen und 30 Männchen (*Pisidiae longicornis*),
d.h. der Männchenanteil in der Stichprobe war $30/53 = 0{,}57$.

(c): public domain

Familie: *Porcellanidae*

In einem Fang vom 21.02.1992 in der Helgoländer Tiefe Rinne waren 23 Weibchen und 30 Männchen (*Pisidiae longicornis*), d.h. der Männchenanteil in der Stichprobe war $30/53 = 0{,}57$.

Was sagt uns dies über den Männchenanteil in der Population?

(c): public domain

Familie: *Porcellanidae*

In einem Fang vom 21.02.1992 in der Helgoländer Tiefe Rinne waren 23 Weibchen und 30 Männchen (*Pisidiae longicornis*), d.h. der Männchenanteil in der Stichprobe war $30/53 = 0{,}57$.

Was sagt uns dies über den Männchenanteil in der Population?

Was ist ein 95%-Konfidenzintervall für den Männchenanteil in der Population? ($0{,}57 \pm ??$)

# Inhalt

Wir beobachten $X$ Männchen in einer Stichprobe der Größe $n$ und möchten den (unbekannten) Männchenanteil $p$ in der Gesamtpopulation schätzen.

Wir beobachten $X$ Männchen in einer Stichprobe der Größe $n$ und möchten den (unbekannten) Männchenanteil $p$ in der Gesamtpopulation schätzen.

Der offensichtliche Schätzer ist
die relative Häufigkeit $\widehat{p} := \frac{X}{n}$
in der Stichprobe.

Wir beobachten $X$ Männchen in einer Stichprobe der Größe $n$ und möchten den (unbekannten) Männchenanteil $p$ in der Gesamtpopulation schätzen.

Der offensichtliche Schätzer ist
die relative Häufigkeit $\widehat{p} := \frac{X}{n}$
in der Stichprobe.

Frage: Wie verläßlich ist die Schätzung?

Wir beobachten $X$ Männchen in einer Stichprobe der Größe $n$ und möchten den (unbekannten) Männchenanteil $p$ in der Gesamtpopulation schätzen.

Der offensichtliche Schätzer ist
die relative Häufigkeit $\widehat{p} := \frac{X}{n}$
in der Stichprobe.

Frage: Wie verläßlich ist die Schätzung?

Gewünscht: Ein in Abhängigkeit von den Beobachtungen konstruiertes (und möglichst kurzes) Intervall $[\widehat{p}_u, \widehat{p}_o]$ mit der Eigenschaft

$$\Pr_p\left([\widehat{p}_u, \widehat{p}_o] \text{ überdeckt } p\right) \geq 1 - \alpha$$

für *jede Wahl* von $p$.

# Lösungsweg:

Für gegebenes $p$ ist $X$ Binomial($n$,$p$)-verteilt,
$\mathrm{E}[X] = np$, $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

# Lösungsweg:

Für gegebenes $p$ ist $X$ Binomial($n$,$p$)-verteilt,
$E[X] = np$, $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

Wir wissen: Der Schätzer $\widehat{p}$ ist (in etwa) normalverteilt mit Erwartungswert $p$ und Standardabweichung $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.
Dies können wir allerdings nicht verwenden, da $p$ unbekannt ist.

# Lösungsweg:

Für gegebenes $p$ ist $X$ Binomial($n$,$p$)-verteilt,
$E[X] = np$, $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

Wir wissen: Der Schätzer $\widehat{p}$ ist (in etwa) normalverteilt mit Erwartungswert $p$ und Standardabweichung $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.
Dies können wir allerdings nicht verwenden, da $p$ unbekannt ist.

Stattdessen nutzen wir wieder die Student-Verteilung, wobei hier als Schätzer für die Standardabweichung von $\widehat{p}$

$$\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}$$

verwendet wird.

# Lösungsweg:

Für gegebenes $p$ ist $X$ Binomial($n$,$p$)-verteilt,
$\mathrm{E}[X] = np$, $\mathrm{Var}[X] = np(1-p)$.

Wir wissen: Der Schätzer $\widehat{p}$ ist (in etwa) normalverteilt mit Erwartungswert $p$ und Standardabweichung $\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.
Dies können wir allerdings nicht verwenden, da $p$ unbekannt ist.

Stattdessen nutzen wir wieder die Student-Verteilung, wobei hier als Schätzer für die Standardabweichung von $\widehat{p}$

$$\sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}$$

verwendet wird. (Das Quadrat hiervon ist ein erwartungstreuer Schätzer der Varianz.

In der Literatur wird auch der ML-Schätzer $\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/n}$ verwendet.)

## Lösung:

Sei $\widehat{p}$ die relative Häufigkeit in der Stichprobe der Länge $n$. Das Konfidenzintervall zum Irrtumsniveau $\alpha$ ist

$$\left[\widehat{p} - t_{\alpha,n-1} * \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}, \widehat{p} + t_{\alpha,n-1} * \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}\right]$$

wobei $t_{\alpha,n-1}$ `<- -qt(`$\alpha/2$`,n-1)` das $\alpha/2$-Quantil der Student-Verteilung mit `n-1` Freiheitsgraden ist.

# Inhalt

# Männchenanteil beim Porzellankrebs

Setzt man die Zahlenwerte $n = 53$, $\widehat{p} = 0.566$, $t_{5\%,52} = 2.007$ und $\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/(n-1)} = 0.0687$ in

$$\left[\widehat{p} - t_{5\%,52} * \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}, \widehat{p} + t_{5\%,52} * \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}\right]$$

ein, so erhält man das Konfidenzintervall

$$[0.428, 0.704] = 0.566 \pm 0.138$$

für den wahren Männchenanteil zum Irrtumsniveau 5%.

# Inhalt

image (c) Andreas Trepte

*Anas platyrhynchos*

Stockente (engl. mallard)

Füchse jagen Stockenten. Durch ihre auffällige Färbung sind dabei Männchen leichter zu erspähen. Hat dies einen Einfluss auf das Geschlechterverhältnis bei amerikanischen Stockenten?

Füchse jagen Stockenten. Durch ihre auffällige Färbung sind dabei Männchen leichter zu erspähen. Hat dies einen Einfluss auf das Geschlechterverhältnis bei amerikanischen Stockenten?

Daten: Stichprobe der Länge $n = 2200$. Relative Häufigkeit der Männchen war 0.564.

Daten aus:

Johnson, Sargeant (1977) Impact of red fox predation on the sex ratio of prairie mallards
*United States fish & wild life service*

Setzt man die Zahlenwerte $n = 2200$, $\widehat{p} = 0.564$, $t_{5\%,2199} = 1.961$ und $\sqrt{\widehat{p}(1-\widehat{p})/(n-1)} = 0.011$ in

$$\left[\widehat{p} - t_{5\%} * \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}, \widehat{p} + t_{5\%} * \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n-1}}\right]$$

ein, so erhält man das Konfidenzintervall

$$[0.543, 0.585] = 0.564 \pm 0.021$$

für den wahren Männchenanteil zum Irrtumsniveau 5%.

# Inhalt

- Für die Gültigkeit der Approximation muss $n$ genügend groß und $p$ nicht zu nahe an 0 oder 1 sein. (Eine häufig zitierte „Faustregel“ ist „$np \geq 9$, $n(1-p) \geq 9$“.)

- Für die Gültigkeit der Approximation muss $n$ genügend groß und $p$ nicht zu nahe an 0 oder 1 sein. (Eine häufig zitierte „Faustregel" ist „$np \geq 9$, $n(1-p) \geq 9$".)
- Die Philosophie der Konfidenzintervalle entstammt der *frequentistischen* Interpretation der Statistik: Für jede Wahl des Parameters $p$ würden wir bei häufiger Wiederholung des Experiments finden, dass in (ca.) $(1-\alpha) \cdot 100\%$ der Fälle das (zufällige) Konfidenzintervall den „wahren" (festen) Parameter $p$ überdeckt.