

Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik für Biologen **Diskriminanzanalyse**

Martin Hutzenthaler & Dirk Metzler

http://evol.bio.lmu.de/_statgen

6. Juli 2010

Übersicht

- 1 Ruf des Kleinspechts
- 2 Modell
 - Vorgehen der Diskriminanzanalyse
 - (Mehrdimensionale) Normalverteilung
- 3 Zurück zu den Rufen
 - eine Variable
 - zwei Variable
 - zehn Dimensionen
- 4 Principal component analysis (PCA)

Übersicht

- 1 Ruf des Kleinspechts
- 2 Modell
 - Vorgehen der Diskriminanzanalyse
 - (Mehrdimensionale) Normalverteilung
- 3 Zurück zu den Rufen
 - eine Variable
 - zwei Variable
 - zehn Dimensionen
- 4 Principal component analysis (PCA)



photo (c) Thermos

(Bild zeigt einen Kleinspecht (*Picoides minor*))

Man kann die Geschlechter optisch unterscheiden.

Man kann die Geschlechter optisch unterscheiden.

Frage: Geht es auch akustisch?

Ruf des Kleinspechts:

... ki — ki — ki — ki — ki — ki — ki

Ruf des Kleinspechts:

Längen der letzten fünf **Pausen**

... ki — ki **p1** — ki **p2** — ki **p3** — ki **p4** — ki **p5** — ki

Frage:

Frage:

Kann man aus den Längen der Pausen
und der Laute

Frage:

Kann man aus den Längen der Pausen
und der Laute

(p1, p2, p3, p4, p5, l1, l2, l3, l4, l5)

Frage:

Kann man aus den Längen der Pausen
und der Laute

(p1, p2, p3, p4, p5, l1, l2, l3, l4, l5)

das Geschlecht bestimmen?

Daten: 62 Rufe von Kleinspechten

Daten: 62 Rufe von Kleinspechten

18 Rufe von Männchen

44 Rufe von Weibchen

Daten: 62 Rufe von Kleinspechten

18 Rufe von Männchen

44 Rufe von Weibchen

Daten von Dr. Kerstin Höntsch, Frankfurt
(siehe <http://www.kleinspecht.de>)

aufbereitet von Dr. Brooks Ferebee, Frankfurt

Die Daten in computergerechter Form:

	G	p1	p2	p3	p4	p5	l1	l2	l3	l4	l5
1	1	0.1719	0.1581	0.1726	0.1785	0.1697	0.0740	0.0703	0.0674	0.0725	0.0660
2	1	0.1052	0.1175	0.0986	0.1008	0.1052	0.0957	0.1023	0.0950	0.0957	0.0943
3	1	0.1473	0.1407	0.1393	0.1407	0.1465	0.0754	0.0776	0.0769	0.0725	0.0653
4	1	0.1378	0.1400	0.1552	0.1828	0.1393	0.0718	0.0667	0.0645	0.0754	0.0747
5	1	0.1473	0.1371	0.1284	0.1509	0.1371	0.0740	0.0696	0.0725	0.0718	0.0718
6	1	0.1175	0.1451	0.1393	0.1407	0.1661	0.0740	0.0711	0.0754	0.0689	0.0565
7	1	0.1385	0.1262	0.1487	0.1407	0.1603	0.0653	0.0696	0.0747	0.0776	0.0725
8	1	0.1197	0.1146	0.1204	0.1182	0.1161	0.0783	0.0805	0.0783	0.0878	0.0696
9	1	0.1393	0.1269	0.1458	0.1429	0.1291	0.0761	0.0761	0.0769	0.0856	0.0725
10	1	0.1197	0.1204	0.1124	0.1146	0.1240	0.0754	0.0769	0.0848	0.0798	0.0645
11	1	0.1625	0.1589	0.1385	0.1502	0.1690	0.0638	0.0689	0.0696	0.0645	0.0529
12	1	0.1298	0.1465	0.1349	0.1400	0.1756	0.0812	0.0747	0.0747	0.0689	0.0602
13	1	0.1204	0.1226	0.1306	0.1465	0.1581	0.0761	0.0754	0.0674	0.0631	0.0689
14	1	0.1110	0.1081	0.1233	0.1248	0.1385	0.0732	0.0747	0.0732	0.0660	0.0587
15	1	0.1139	0.1313	0.1371	0.1589	0.1777	0.0689	0.0674	0.0682	0.0682	0.0711
16	1	0.1335	0.1168	0.1248	0.1313	0.1306	0.0718	0.0703	0.0689	0.0682	0.0667
17	1	0.1407	0.1407	0.1284	0.1400	0.1516	0.0725	0.0696	0.0740	0.0667	0.0696
18	1	0.1204	0.1182	0.1204	0.1269	0.1538	0.0805	0.0718	0.0769	0.0696	0.0645
19	2	0.1044	0.1204	0.1298	0.1393	0.1153	0.1110	0.1211	0.1342	0.0972	0.1037
20	2	0.1436	0.1342	0.1248	0.1581	0.1966	0.1451	0.1400	0.1335	0.1371	0.1240
21	2	0.0907	0.0943	0.0936	0.0936	0.1168	0.0921	0.0812	0.0798	0.0761	0.0674
22	2	0.0921	0.0979	0.1015	0.1015	0.1385	0.0827	0.0827	0.0754	0.0696	0.0653
23	2	0.1052	0.1168	0.1161	0.1306	0.1545	0.0776	0.0732	0.0725	0.0711	0.0609
24	2	0.0928	0.0936	0.0943	0.1066	0.1197	0.0819	0.0863	0.0812	0.0819	0.0805
25	2	0.1516	0.1494	0.1603	0.2140	0.1915	0.1414	0.1429	0.1306	0.1385	0.1044

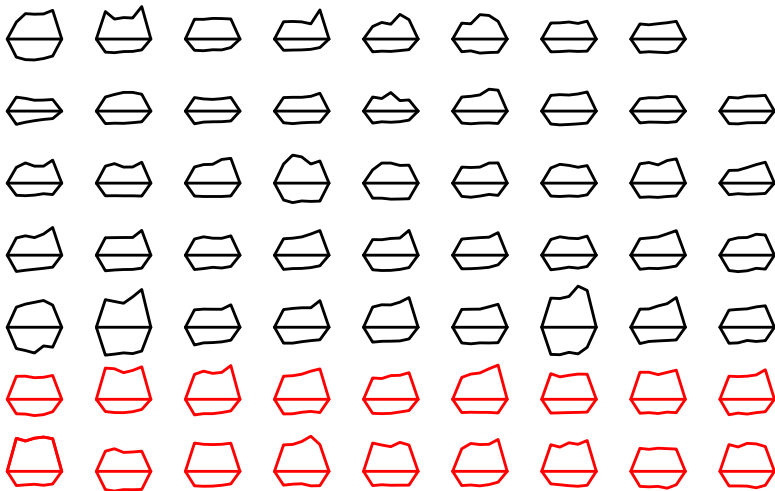
Gesucht:

Gesucht:

eine dem
menschlichen Gehirn gerechte
Darstellung des Vektors

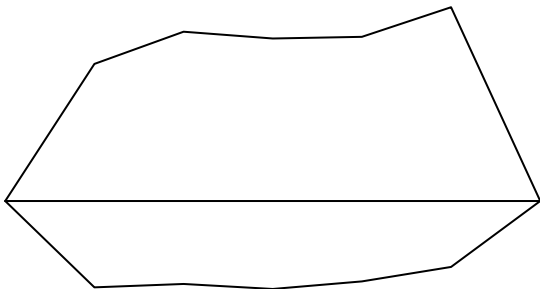
(p1, p2,p3, p4,p5, l1, l2, l3, l4, l5)

Alle 62 Rufe: rot=Männchen, schwarz=Weibchen



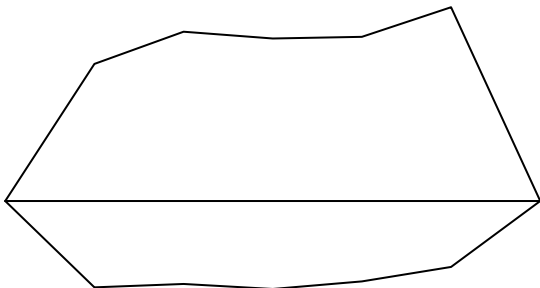
Mit dem Auge kann man Unterschiede erkennen:

Männchen oder Weibchen?

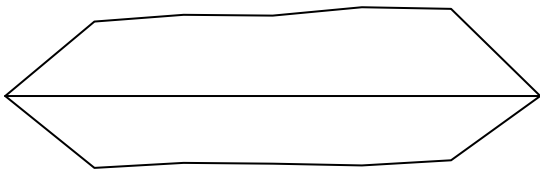


Männchen oder Weibchen?

Typisch Männchen



Männchen oder Weibchen?

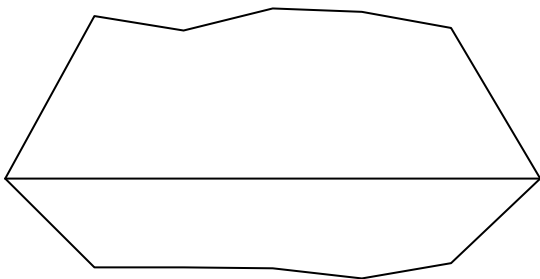


Männchen oder Weibchen?

Typisch Weibchen

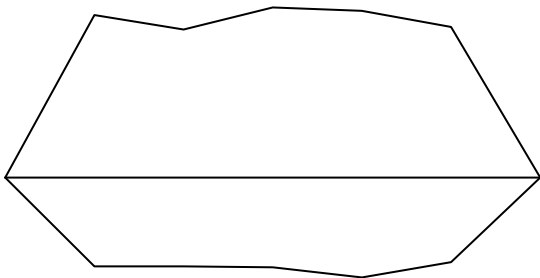


Männchen oder Weibchen?

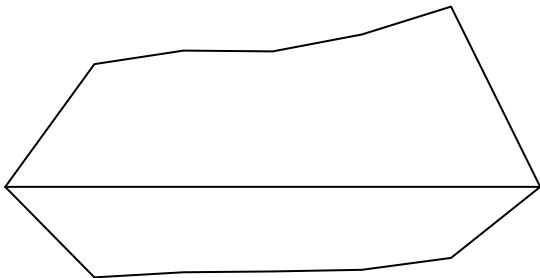


Männchen oder Weibchen?

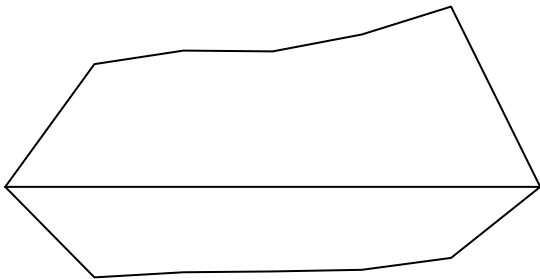
Männchen



Manchmal ist es schwierig:
Männchen oder Weibchen?



Manchmal ist es schwierig:
Männchen oder Weibchen?
Weibchen (untypisch)



Das Auge

Das Auge (das Gehirn)

Das Auge
(das Gehirn)
sieht Unterschiede.

Das Auge
(das Gehirn)
sieht Unterschiede.

Schafft es
der Computer

Das Auge
(das Gehirn)
sieht Unterschiede.

Schafft es
der Computer
(mit Hilfe der Mathematik)
auch?

Übersicht

- 1 Ruf des Kleinspechts
- 2 Modell**
 - Vorgehen der Diskriminanzanalyse
 - (Mehrdimensionale) Normalverteilung
- 3 Zurück zu den Rufen
 - eine Variable
 - zwei Variable
 - zehn Dimensionen
- 4 Principal component analysis (PCA)

Die 10 Zahlen

$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$

fassen wir als die Koordinaten eines Punktes im
10-dimensionalen Raum \mathbb{R}^{10} auf.

Die 10 Zahlen

(p1, p2,p3, p4,p5, l1, l2, l3, l4, l5)

fassen wir als die Koordinaten eines Punktes im
10-dimensionalen Raum \mathbb{R}^{10} auf.

Jeder Ruf entspricht einem Zufallspunkt im \mathbb{R}^{10} :

Die 10 Zahlen

($p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$)

fassen wir als die Koordinaten eines Punktes im 10-dimensionalen Raum \mathbb{R}^{10} auf.

Jeder Ruf entspricht einem Zufallspunkt im \mathbb{R}^{10} :
Männchenrufe aus einer Population mit Dichte f_m

Die 10 Zahlen

$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$

fassen wir als die Koordinaten eines Punktes im 10-dimensionalen Raum \mathbb{R}^{10} auf.

Jeder Ruf entspricht einem Zufallspunkt im \mathbb{R}^{10} :

Männchenrufe aus einer Population mit Dichte f_m

Weibchenrufe aus einer Population mit Dichte f_w

Die 10 Zahlen

$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$

fassen wir als die Koordinaten eines Punktes im 10-dimensionalen Raum \mathbb{R}^{10} auf.

Jeder Ruf entspricht einem Zufallspunkt im \mathbb{R}^{10} :

Männchenrufe aus einer Population mit Dichte f_m

Weibchenrufe aus einer Population mit Dichte f_w

Gesucht: Eine Regel, die jeden neuen Punkt

$x = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5)$
einer der beiden Populationen zuweist.

Übersicht

1 Ruf des Kleinspechts

2 **Modell**

- **Vorgehen der Diskriminanzanalyse**
- (Mehrdimensionale) Normalverteilung

3 Zurück zu den Rufen

- eine Variable
- zwei Variable
- zehn Dimensionen

4 Principal component analysis (PCA)

Verfahren

- 1 Schätze f_m und f_w

Verfahren

- 1 Schätze f_m und f_w
- 2 Ordne x der Population mit dem **größeren f -Wert** zu.

Verfahren

- 1 Schätze f_m und f_w
- 2 Ordne x der Population mit dem **größeren f -Wert** zu.

Wir benutzen für f_m und f_w **mehrdimensionale Normalverteilungen.**

Verfahren

- 1 Schätze f_m und f_w
- 2 Ordne x der Population mit dem **größeren f -Wert** zu.

Wir benutzen für f_m und f_w **mehrdimensionale Normalverteilungen.**

Vorteil: Leicht anzupassen.

Verfahren

- 1 Schätze f_m und f_w
- 2 Ordne x der Population mit dem **größeren f -Wert** zu.

Wir benutzen für f_m und f_w **mehrdimensionale Normalverteilungen**.

Vorteil: Leicht anzupassen. Wir müssen nur Mittelwert(svektor) und Varianz (mehrdimensional: die Kovarianzmatrix) schätzen.

Übersicht

1 Ruf des Kleinspechts

2 **Modell**

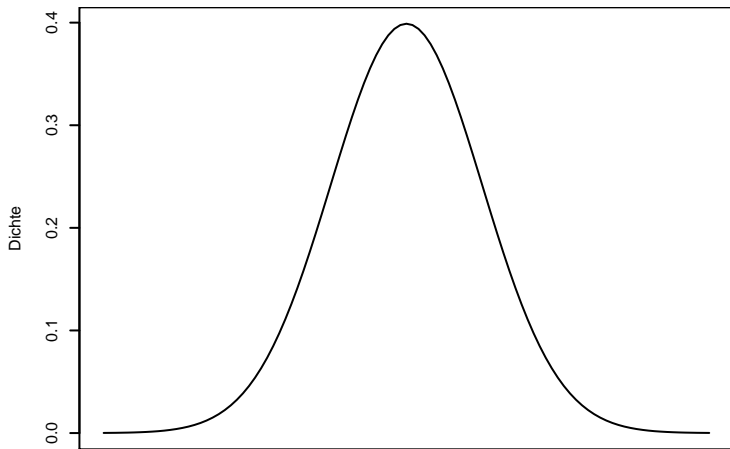
- Vorgehen der Diskriminanzanalyse
- **(Mehrdimensionale) Normalverteilung**

3 Zurück zu den Rufen

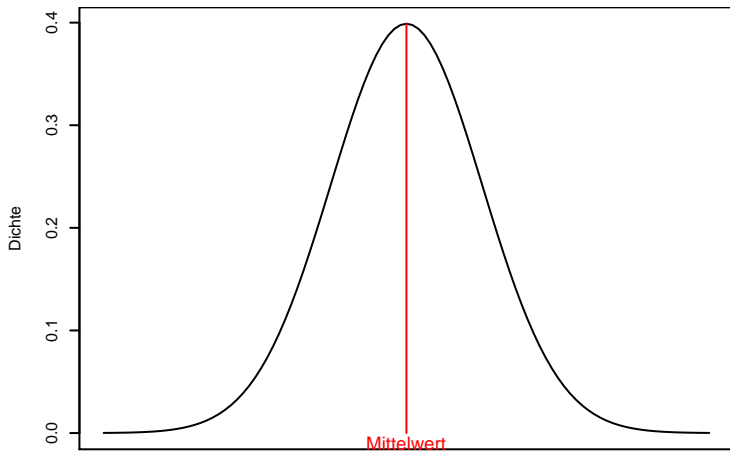
- eine Variable
- zwei Variable
- zehn Dimensionen

4 Principal component analysis (PCA)

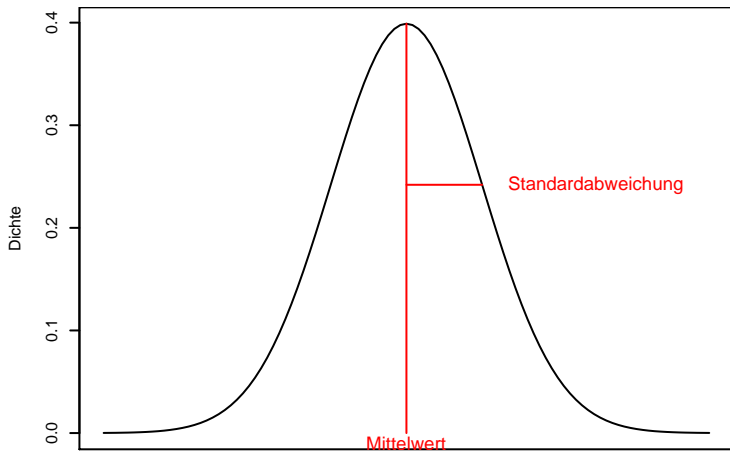
Erinnerung: Eindimensionale Normalverteilung



Erinnerung: Eindimensionale Normalverteilung



Erinnerung: Eindimensionale Normalverteilung



Zur Beschreibung einer mehrdimensionalen Normalverteilung benötigt man

- Einen Mittelwertvektor μ
- Ein Achsenkreuz (die „Hauptachsen“)
- Standardabweichungen in den Achsenrichtungen

Übersicht

- 1 Ruf des Kleinspechts
- 2 Modell
 - Vorgehen der Diskriminanzanalyse
 - (Mehrdimensionale) Normalverteilung
- 3 Zurück zu den Rufen**
 - eine Variable
 - zwei Variable
 - zehn Dimensionen
- 4 Principal component analysis (PCA)

In unserem Problem gibt es 10 Dimensionen.

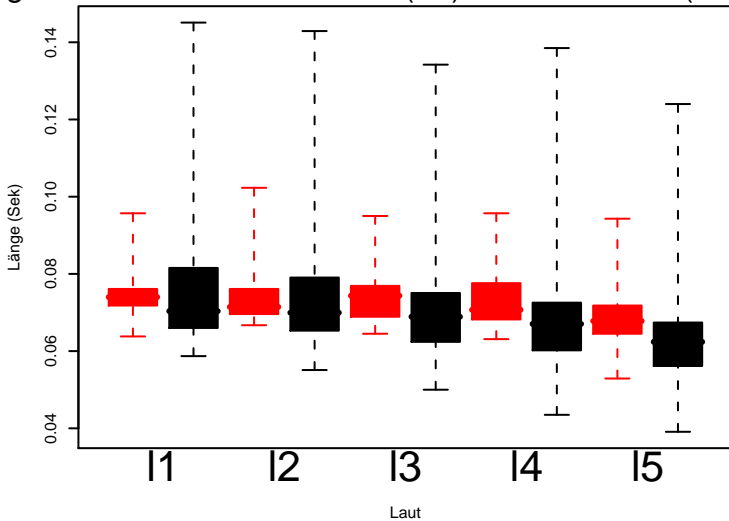
In unserem Problem gibt es 10 Dimensionen.
Wir beginnen eindimensional.

In unserem Problem gibt es 10 Dimensionen.

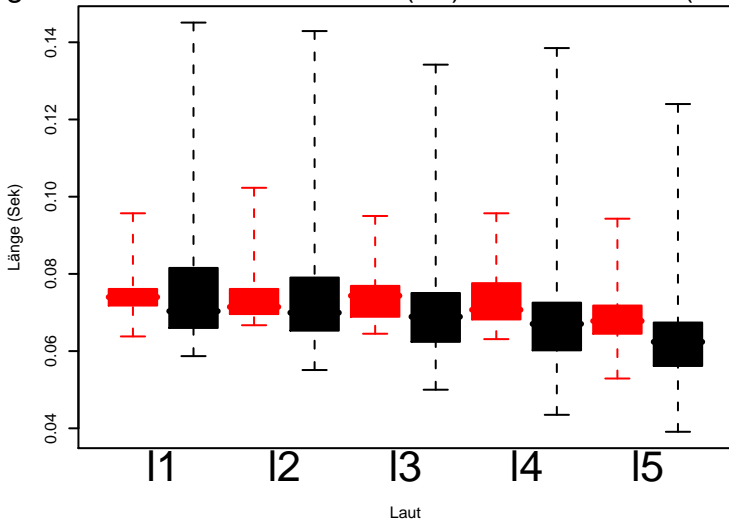
Wir beginnen eindimensional.

Frage: Welche **eine** der 10 Variablen sollen wir wählen?

Länge der Laute bei Männchen (rot) und Weibchen (schwarz)

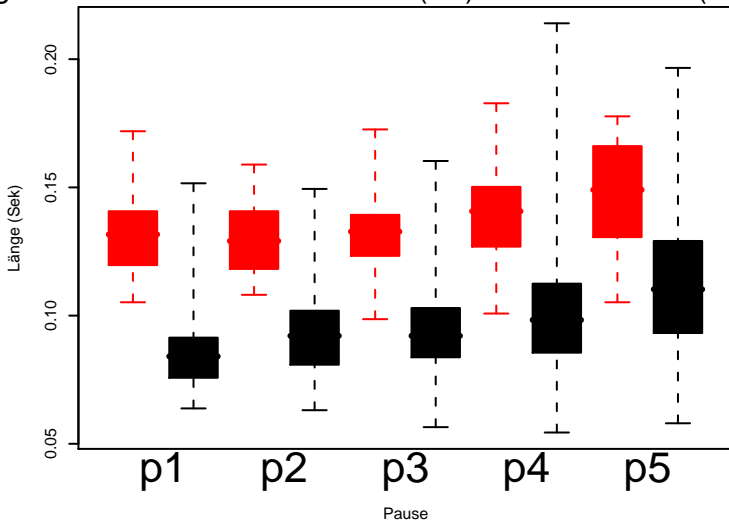


Länge der Laute bei Männchen (rot) und Weibchen (schwarz)

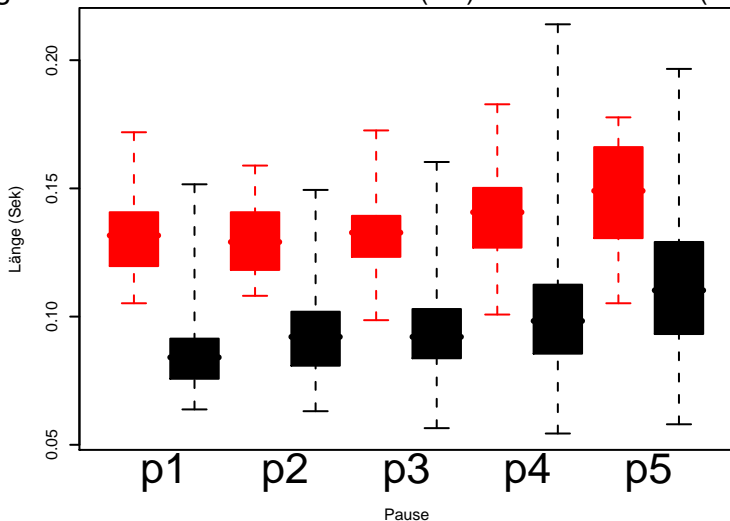


Keine gute Trennung der Geschlechter

Länge der Pausen bei Männchen (rot) und Weibchen (schwarz)



Länge der Pausen bei Männchen (rot) und Weibchen (schwarz)



Bei den Männchen sind die Pausen typischerweise länger

Übersicht

1 Ruf des Kleinspechts

2 Modell

- Vorgehen der Diskriminanzanalyse
- (Mehrdimensionale) Normalverteilung

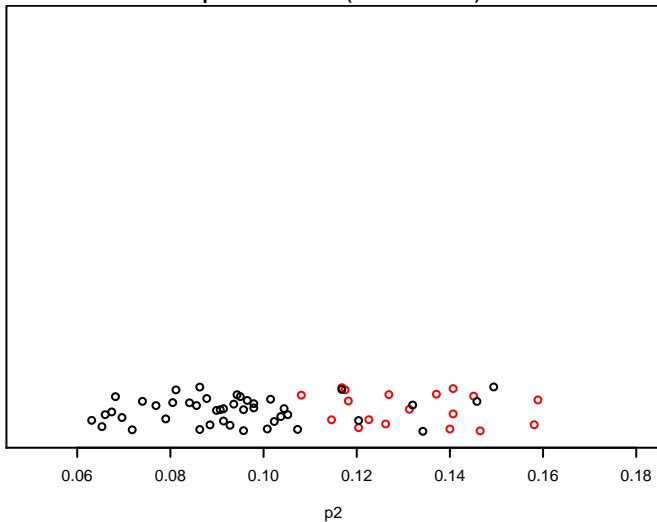
3 Zurück zu den Rufen

- **eine Variable**
- zwei Variable
- zehn Dimensionen

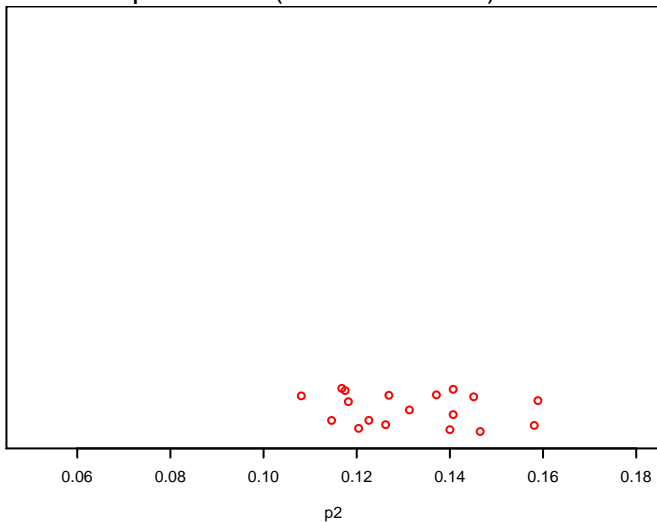
4 Principal component analysis (PCA)

Wie gut läßt sich das Geschlecht anhand von p_2 , der Länge der zweiten Pause, bestimmen?

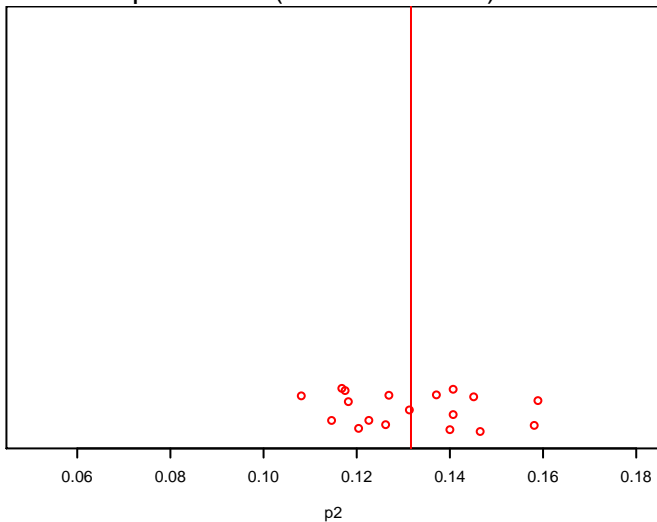
Die p2-Werte (mit Jitter)



p2-Werte (nur Männchen)

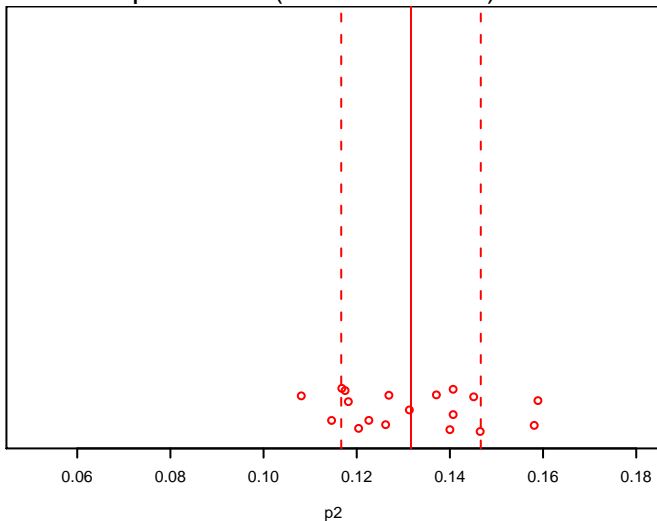


p2-Werte (nur Männchen)



Mittelwert $\mu_m = 0,1316$

p2-Werte (nur Männchen)

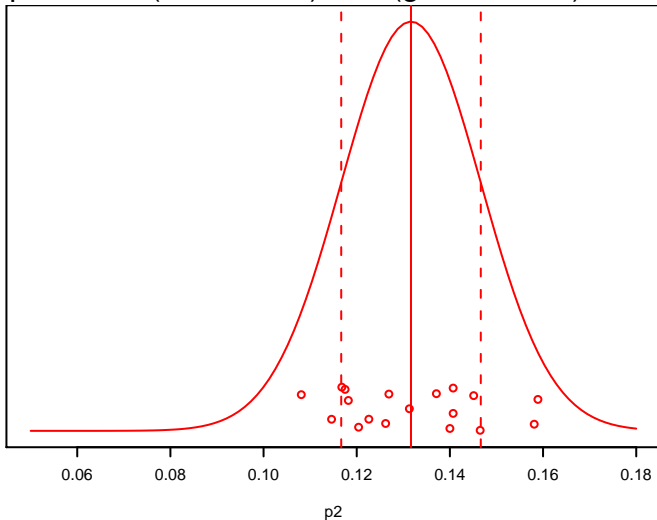


Mittelwert $\mu_m = 0,1316$, Standardabweichung $\sigma_m = 0,0150$

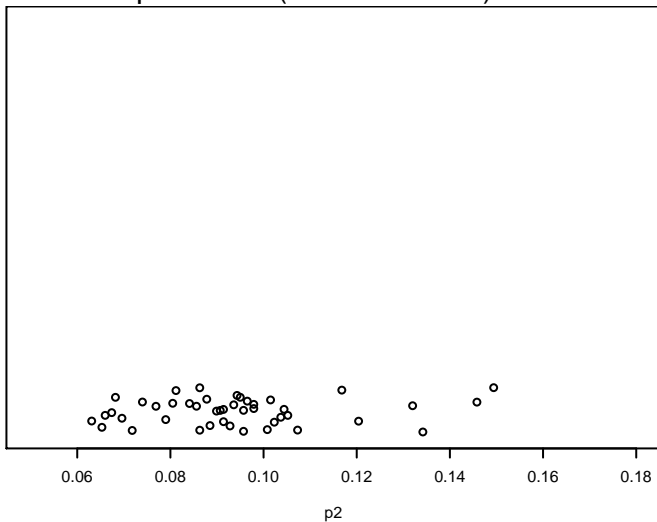
Wir approximieren f_m durch die **Normalverteilung** mit Mittelwert μ_m und Standardabweichung σ_m

Wir approximieren f_m durch die **Normalverteilung** mit Mittelwert μ_m und Standardabweichung σ_m

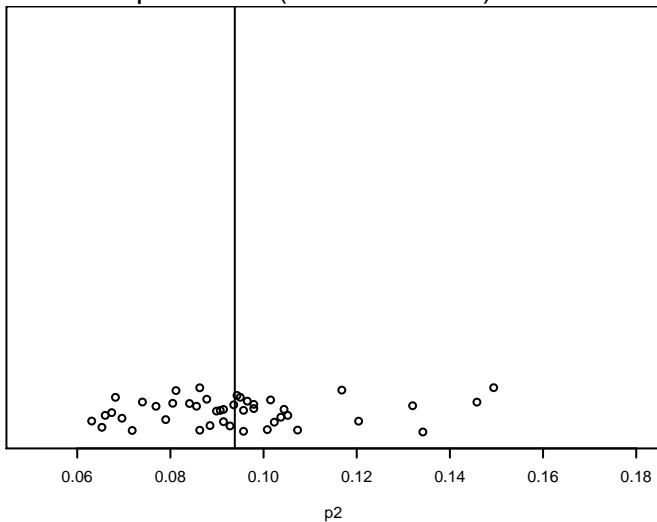
p2-Werte (Männchen) und (geschätztes) f_m



p2-Werte (nur Weibchen)

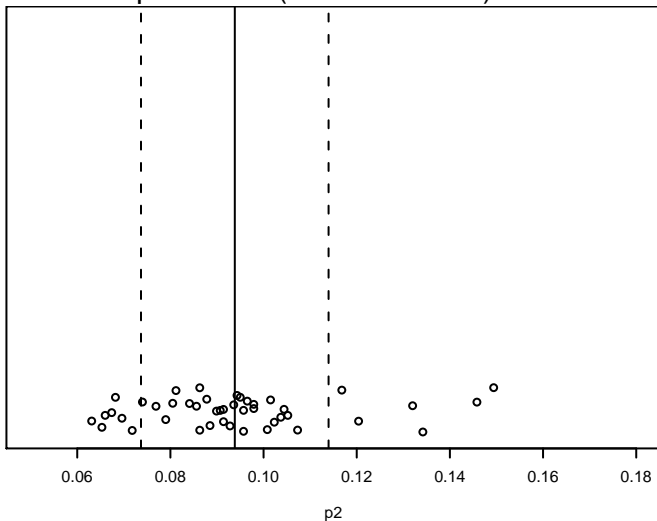


p2-Werte (nur Weibchen)



Mittelwert $\mu_w = 0,0938$

p2-Werte (nur Weibchen)

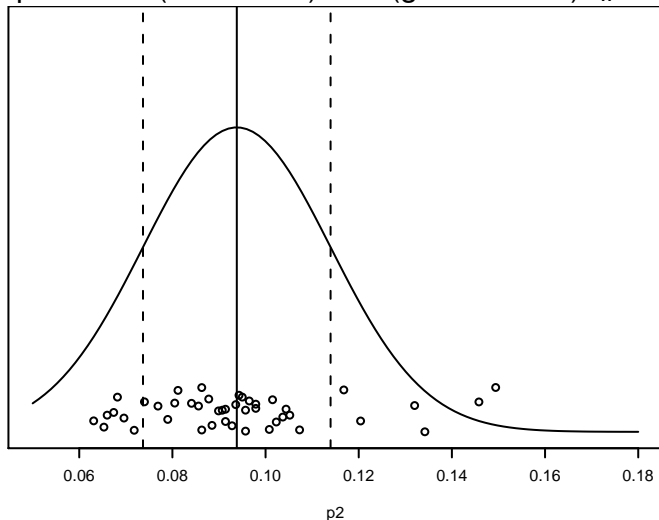


Mittelwert $\mu_w = 0,0938$, Standardabweichung $\sigma_m = 0,0201$

Wir approximieren f_w durch die **Normalverteilung** mit Mittelwert μ_w und Standardabweichung σ_w

Wir approximieren f_w durch die **Normalverteilung** mit Mittelwert μ_w und Standardabweichung σ_w

p2-Werte (Weibchen) und (geschätztes) f_w



Klassifikationsregel:

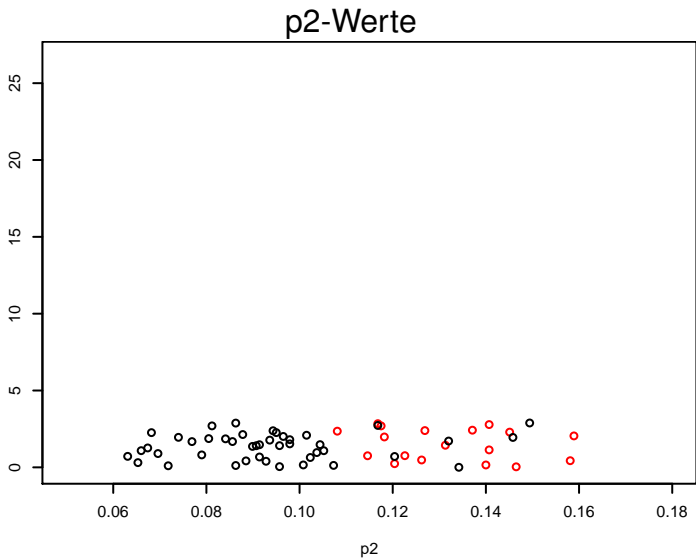
Klassifikationsregel:

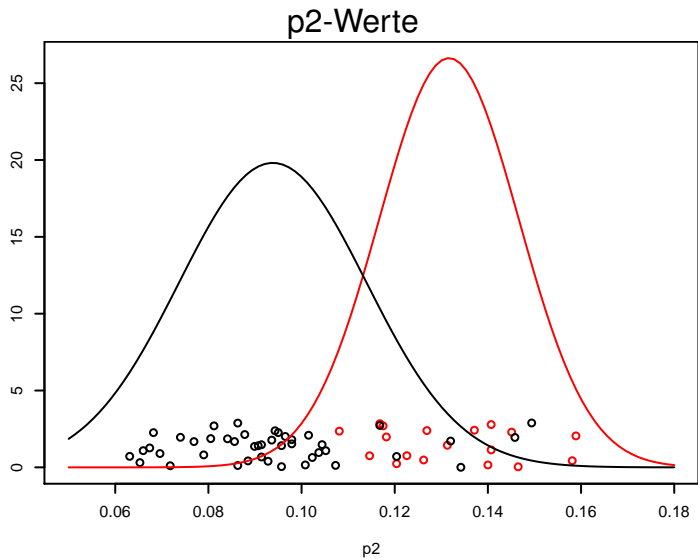
f_m größer \longrightarrow „Männchen“

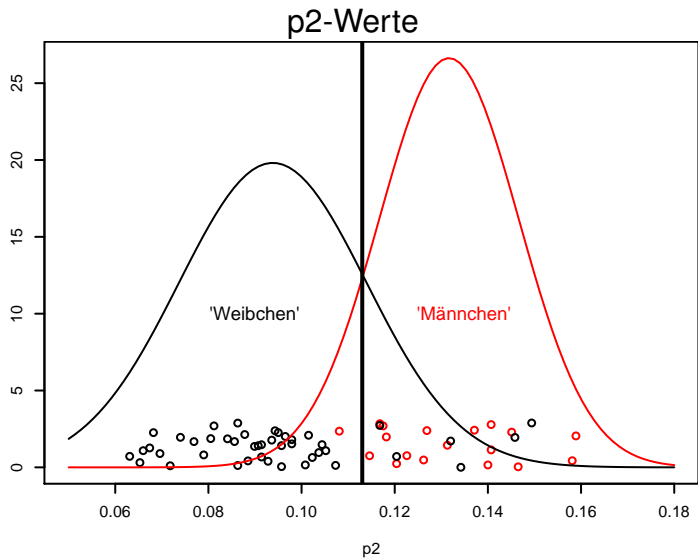
Klassifikationsregel:

f_m größer \longrightarrow „Männchen“

f_w größer \longrightarrow „Weibchen“

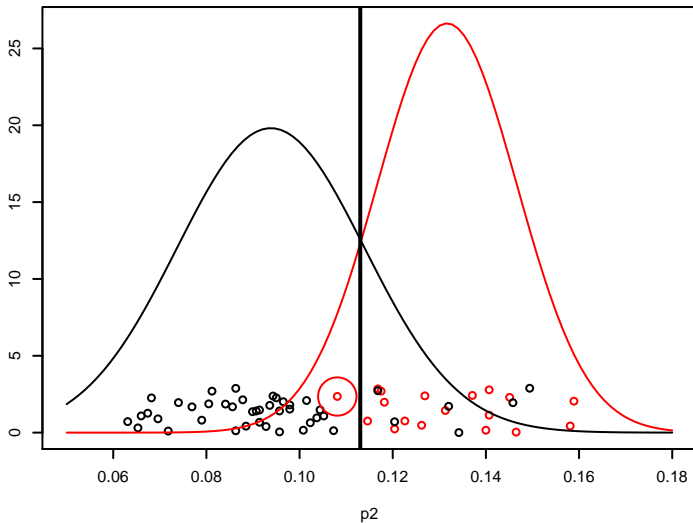






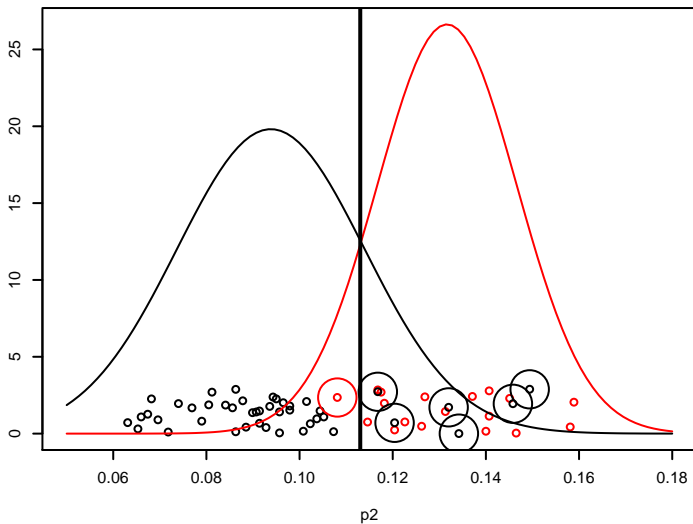
Falsch klassifiziert:

Falsch klassifiziert: 1 Männchen



Falsch klassifiziert:

1 Männchen 6 Weibchen



Übersicht

- 1 Ruf des Kleinspechts
- 2 Modell
 - Vorgehen der Diskriminanzanalyse
 - (Mehrdimensionale) Normalverteilung
- 3 Zurück zu den Rufen**
 - eine Variable
 - zwei Variable**
 - zehn Dimensionen
- 4 Principal component analysis (PCA)

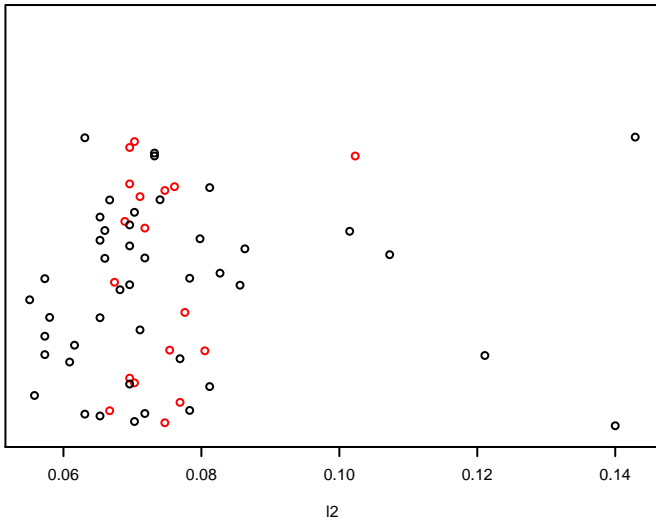
Zur Verbesserung der Klassifikation nehmen wir **mehr Information hinzu**, z.B. eine weitere Variable.

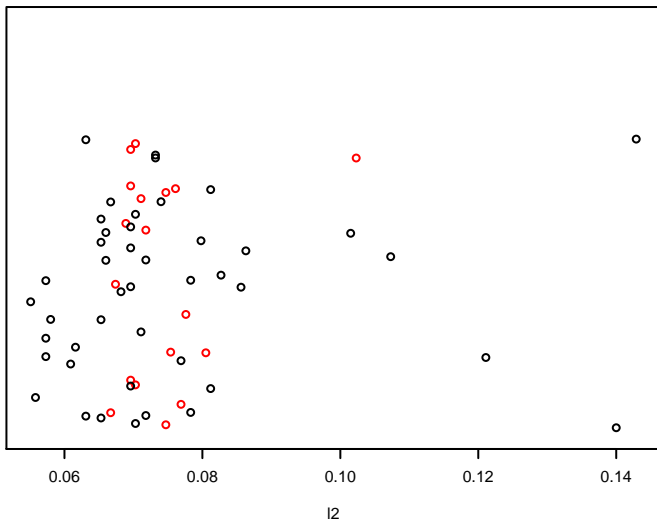
Zur Verbesserung der Klassifikation nehmen wir **mehr Information hinzu**, z.B. eine weitere Variable.

Wir betrachten:

Erste Variable = p_2

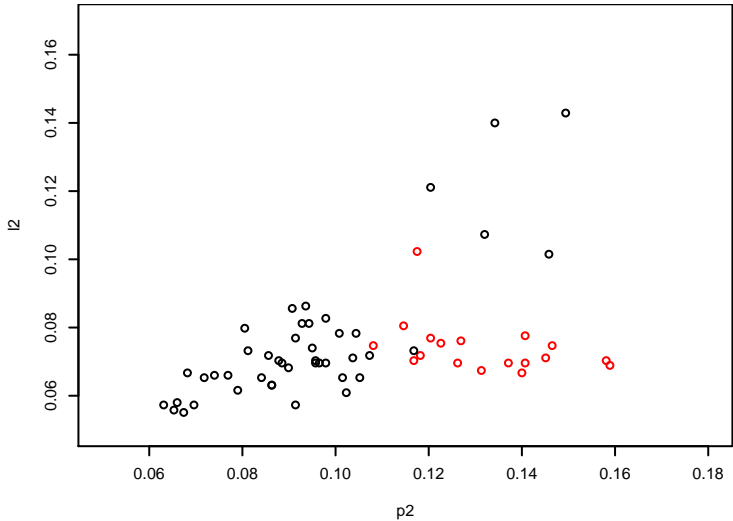
Zweite Variable = l_2



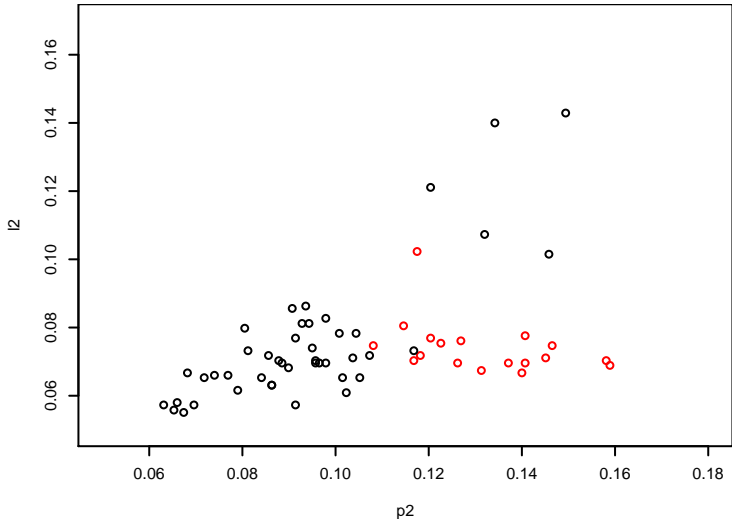


Beobachtung: I2 allein trennt die Geschlechter sehr schlecht.

Aber: I_2 **zusammen** mit p_2 gibt zusätzliche Information:



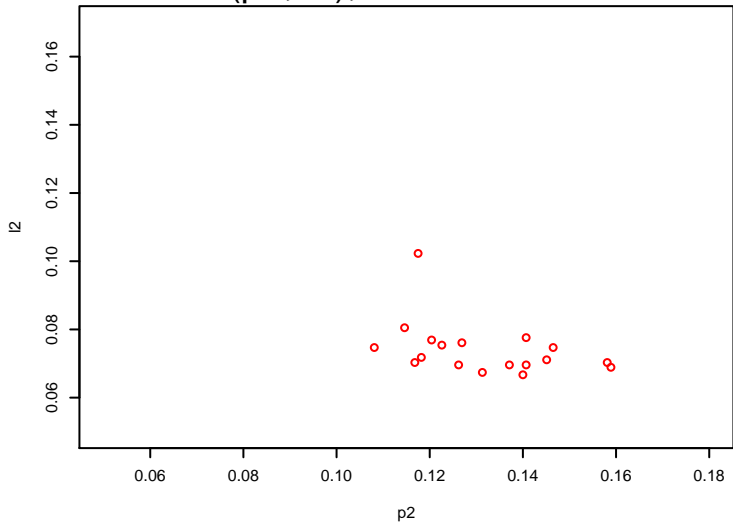
Aber: I2 **zusammen** mit p2 gibt zusätzliche Information:



Beispielsweise zeigt die Hinzunahme von I_2 , dass die 5 Punkte oben rechts besser zu den Weibchen passen.

Wir approximieren
die Verteilungen
von (p_2, l_2) bei Männchen und bei Weibchen
durch
zweidimensionale
Normalverteilungen.

(p2, l2), Männchen



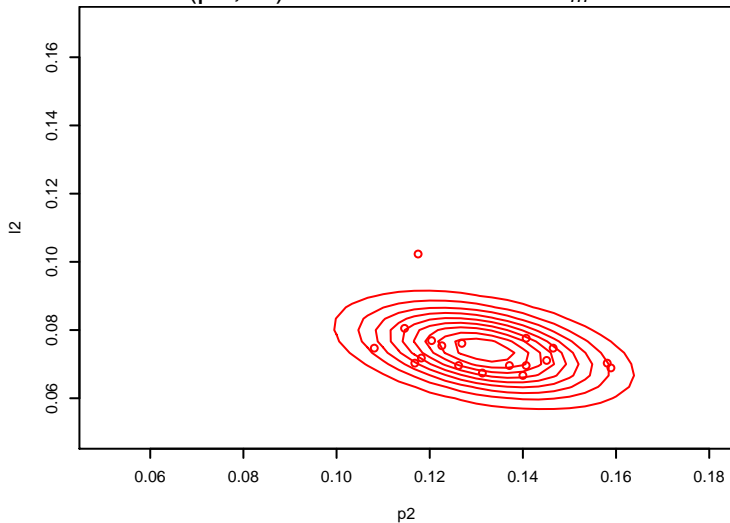
Wie im eindimensionalen Fall schätzen wir
den (zweidimensionalen) **Mittelwert**

Wie im eindimensionalen Fall schätzen wir
den (zweidimensionalen) **Mittelwert**
und die (zweidimensionale) Varianz
(d.h. die sog. **Kovarianzmatrix**)

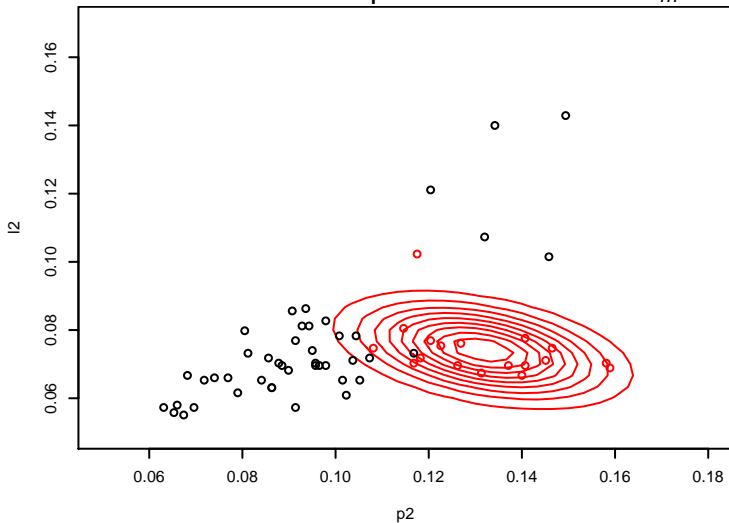
Wie im eindimensionalen Fall schätzen wir den (zweidimensionalen) **Mittelwert** und die (zweidimensionale) Varianz (d.h. die sog. **Kovarianzmatrix**)

und approximieren f_m durch eine **zweidimensionale Normalverteilung** mit dem geschätzten Mittelwert und der geschätzten Varianz.

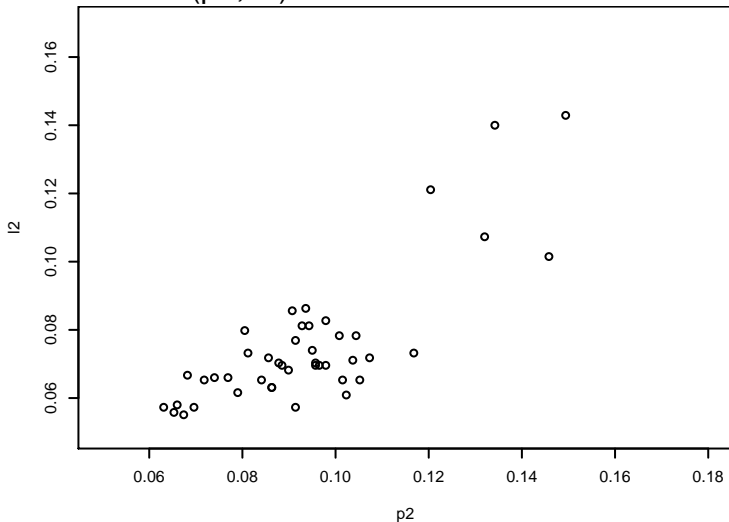
(p2, l2) für Männchen und f_m



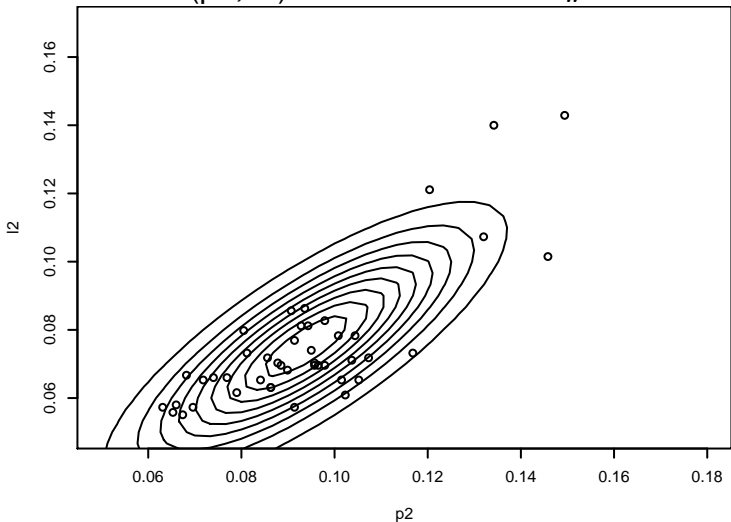
Viele der Weibchen passen schlecht zu f_m :



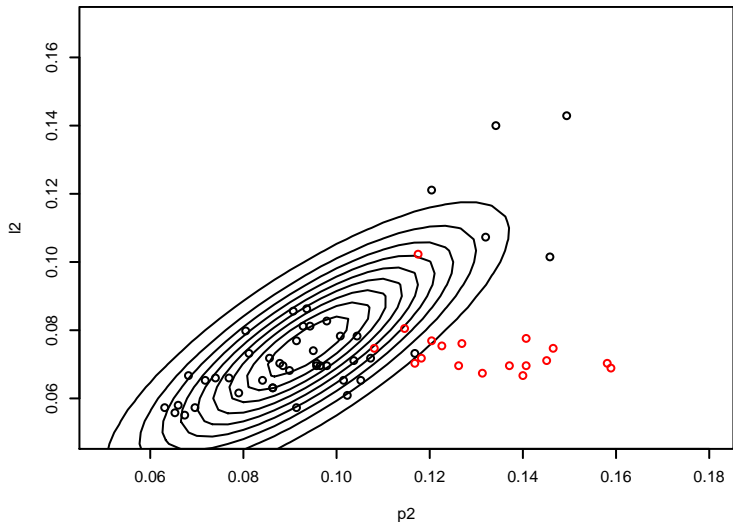
Analog für die Weibchen: (p2, l2) für Weibchen



Analog für die Weibchen:
(p_2 , l_2) für Weibchen und f_w



Viele der Männchen passen schlecht zu f_w :



Klassifikation:

Für jeden Punkt berechnen wir $f_m(x)$ und $f_w(x)$.

$f_m(x)$ größer \longrightarrow „Männchen“

$f_w(x)$ größer \longrightarrow „Weibchen“

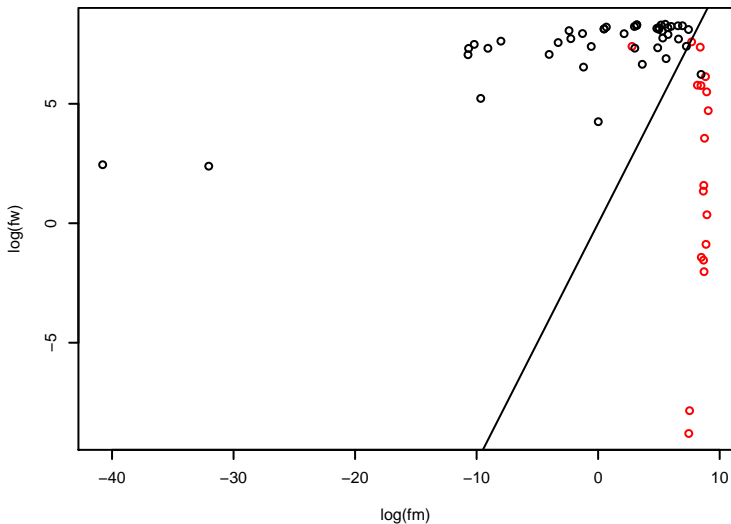
Klassifikation:

Für jeden Punkt berechnen wir $f_m(x)$ und $f_w(x)$.

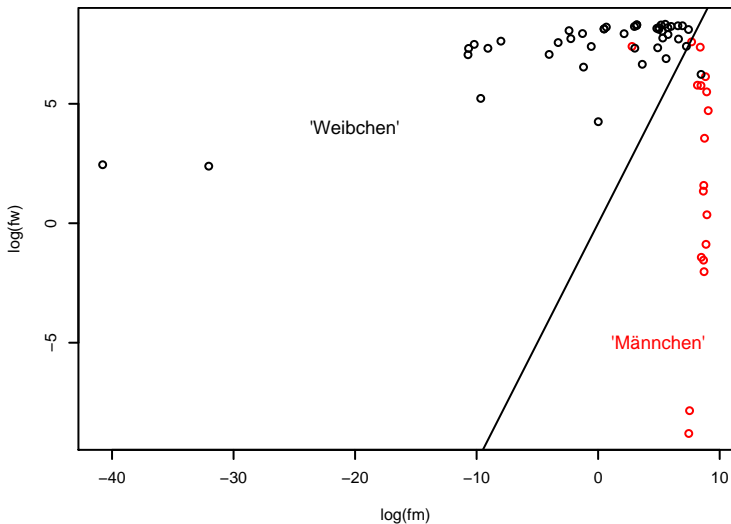
$f_m(x)$ größer \longrightarrow „Männchen“

$f_w(x)$ größer \longrightarrow „Weibchen“

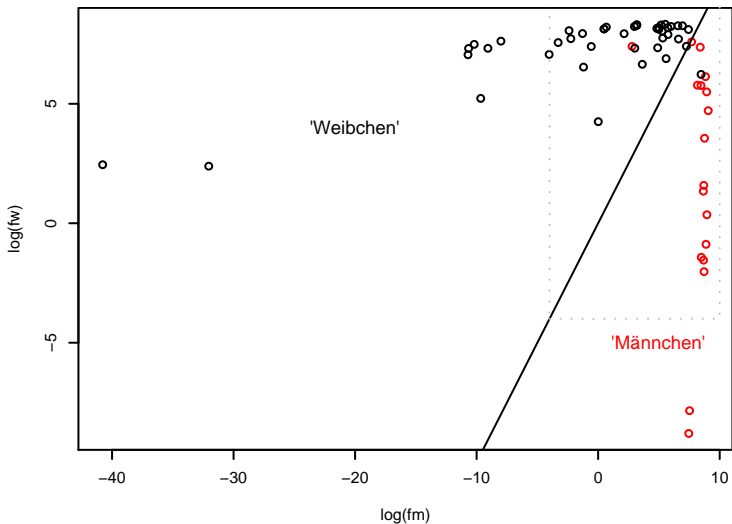
$\log(f_w)$ gegen $\log(f_m)$ und Diagonale:



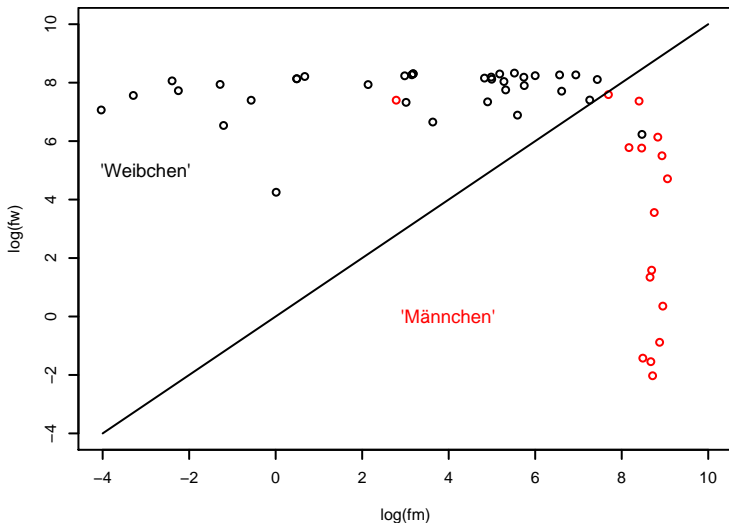
$\log(f_w)$ gegen $\log(f_m)$ und Diagonale:



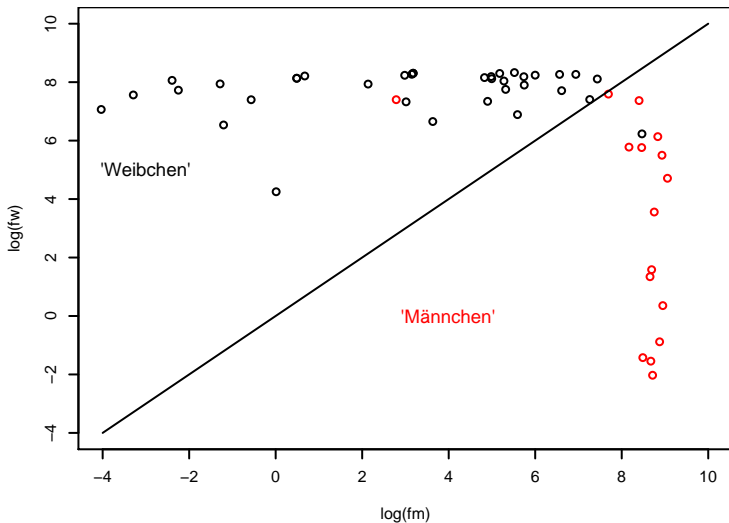
$\log(f_w)$ gegen $\log(f_m)$ und Diagonale:



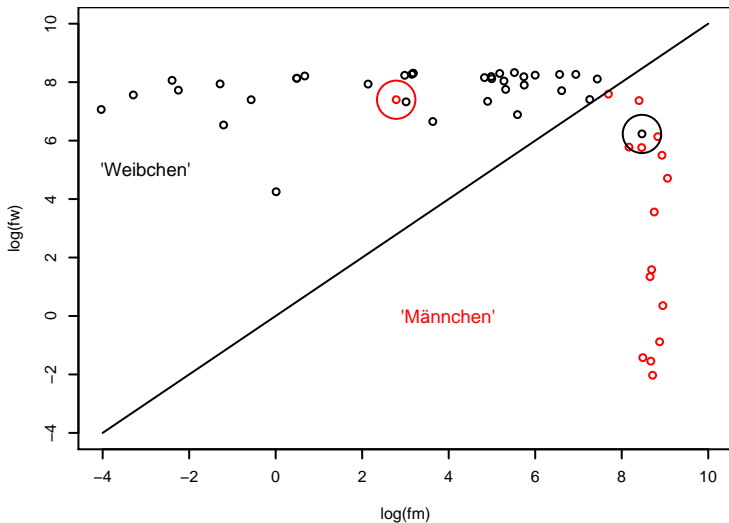
$\log(f_w)$ gegen $\log(f_m)$ und Diagonale, Ausschnittvergrößerung:



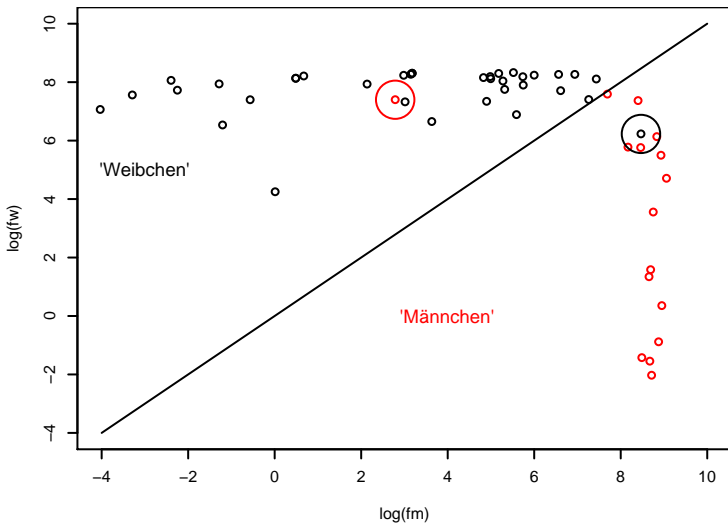
Falsch klassifiziert:



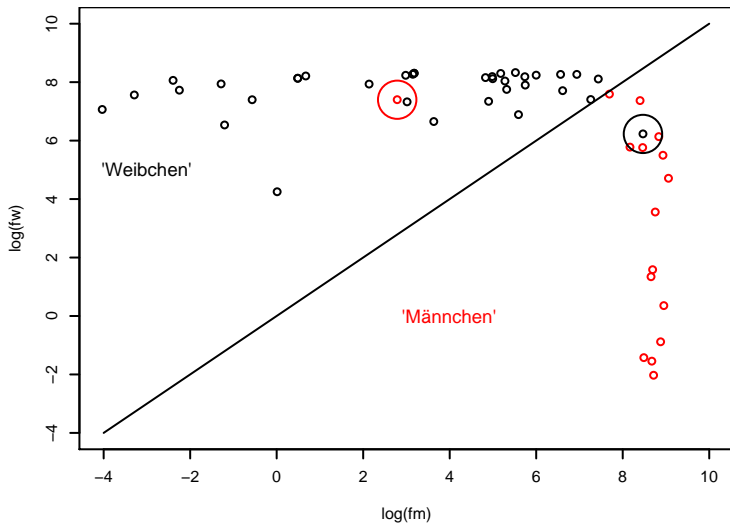
Falsch klassifiziert: 1 Männchen



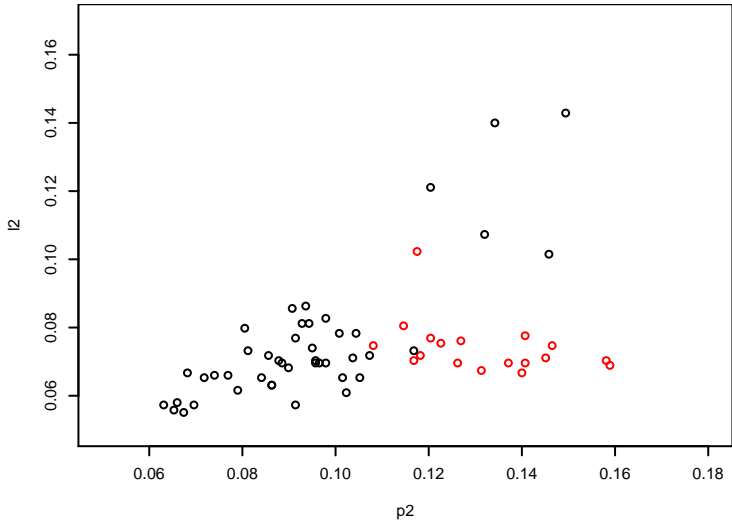
Falsch klassifiziert: 1 Männchen, 1 Weibchen



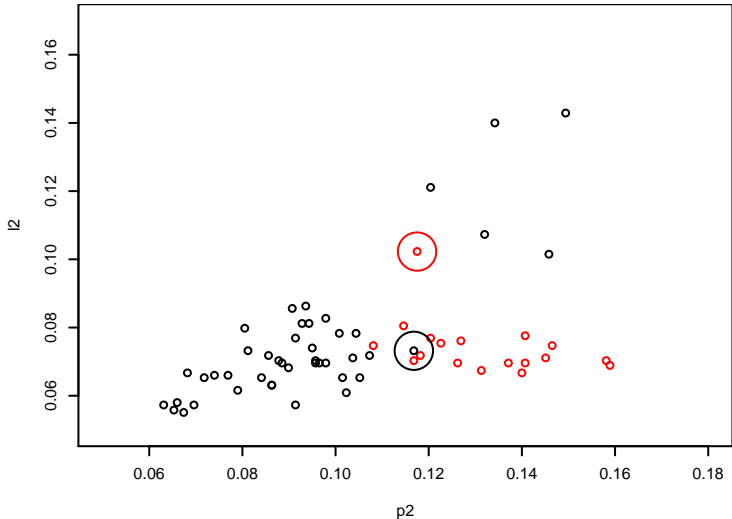
Falsch klassifiziert:
1 Männchen, 1 Weibchen
(und eigentlich 2 „unentschieden“)



Welche Fälle wurden falsch zugeordnet?



Welche Fälle wurden falsch zugeordnet?



Wenn man nur p_2 und l_2 kennt, ist es sehr verständlich, dass diese Fälle falsch klassifiziert werden.

Übersicht

1 Ruf des Kleinspechts

2 Modell

- Vorgehen der Diskriminanzanalyse
- (Mehrdimensionale) Normalverteilung

3 Zurück zu den Rufen

- eine Variable
- zwei Variable
- zehn Dimensionen

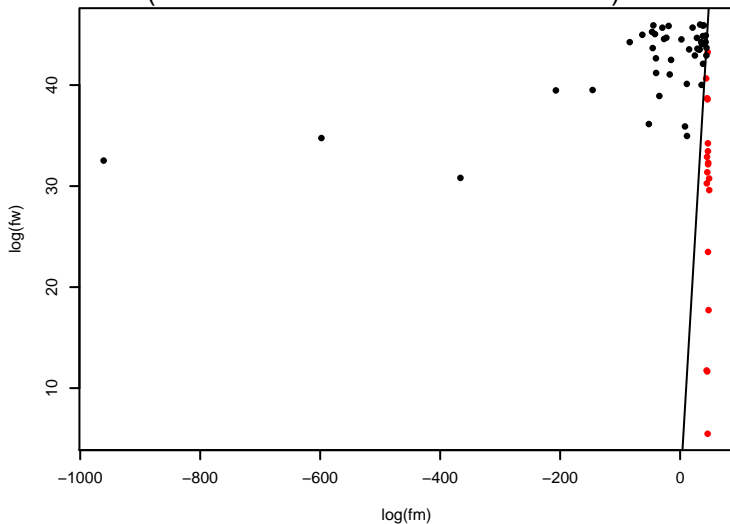
4 Principal component analysis (PCA)

Wir verfahren genauso mit allen Variablen ($p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$) gemeinsam

Wir verfahren genauso mit allen Variablen ($p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, l_1, l_2, l_3, l_4, l_5$) gemeinsam — mathematisch analog, allerdings geometrisch sehr schwierig darzustellen.

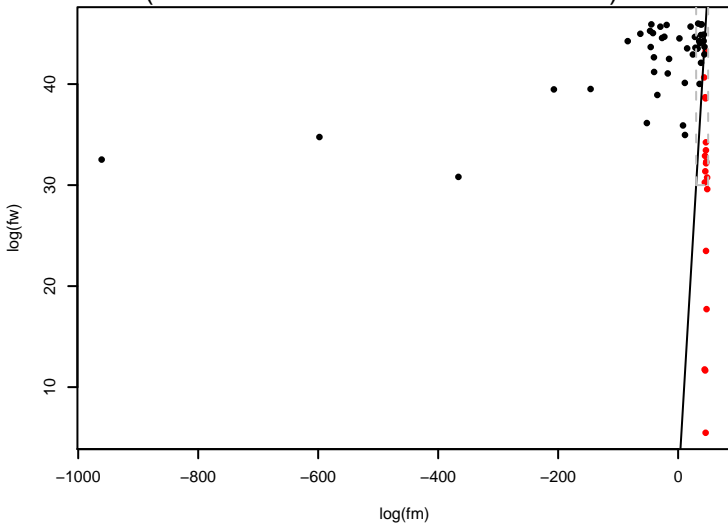
Ergebnis:

$\log(f_w)$ gegen $\log(f_m)$ und Diagonale
(basierend auf allen 10 Variablen):

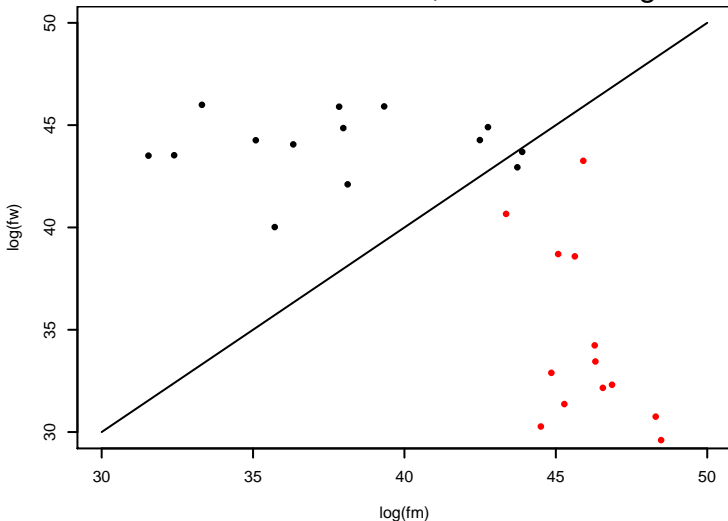


Ergebnis:

$\log(f_w)$ gegen $\log(f_m)$ und Diagonale
(basierend auf allen 10 Variablen):



$\log(f_w)$ gegen $\log(f_m)$ und Diagonale
(basierend auf allen 10 Variablen, Ausschnittvergrößerung):



$\log(f_w)$ gegen $\log(f_m)$ und Diagonale
(basierend auf allen 10 Variablen, Ausschnittvergrößerung):
Die zwei mit (p2,l2) falsch klassifizierten Fälle wurden nun
richtig klassifiziert.

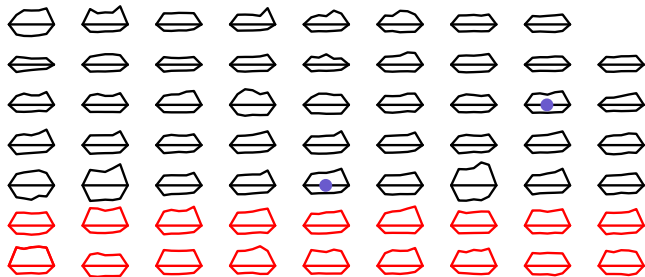
$\log(f_w)$ gegen $\log(f_m)$ und Diagonale

(basierend auf allen 10 Variablen, Ausschnittvergrößerung):

Die zwei mit (p2,l2) falsch klassifizierten Fälle wurden nun richtig klassifiziert.

Allerdings wurden zwei Weibchen (knapp) falsch klassifiziert.

Falsch klassifiziert



Die beiden falsch klassifizierten Rufe: sie sehen ziemlich „männlich“ aus.

Übersicht

- 1 Ruf des Kleinspechts
- 2 Modell
 - Vorgehen der Diskriminanzanalyse
 - (Mehrdimensionale) Normalverteilung
- 3 Zurück zu den Rufen
 - eine Variable
 - zwei Variable
 - zehn Dimensionen
- 4 **Principal component analysis (PCA)**

Wir wollen multi-dimensionale Daten visualisieren,
um gewisse Muster zu finden.

Wir wollen multi-dimensionale Daten visualisieren,
um gewisse Muster zu finden.

Wie visualisieren wir
multi-dimensionale Daten???

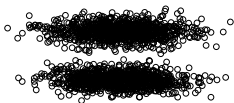
Beispiel: 2-dimensionale Daten in 3 Dimensionen (Vorstellung: Wolke rotiert in 3 Dimensionen)



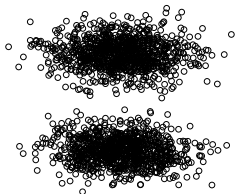
Beispiel: 2-dimensionale Daten in 3 Dimensionen (Vorstellung: Wolke rotiert in 3 Dimensionen)



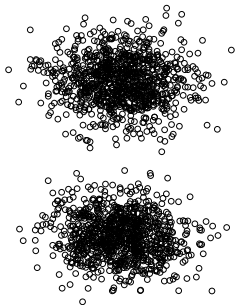
Beispiel: 2-dimensionale Daten in 3 Dimensionen (Vorstellung: Wolke rotiert in 3 Dimensionen)



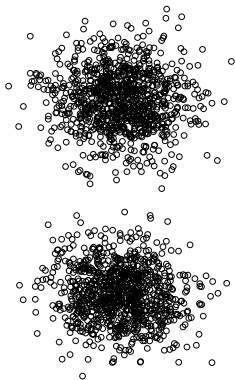
Beispiel: 2-dimensionale Daten in 3 Dimensionen (Vorstellung: Wolke rotiert in 3 Dimensionen)



Beispiel: 2-dimensionale Daten in 3 Dimensionen (Vorstellung: Wolke rotiert in 3 Dimensionen)



Beispiel: 2-dimensionale Daten in 3 Dimensionen (Vorstellung: Wolke rotiert in 3 Dimensionen)



Um einen guten Blick auf die Daten zu haben
wollen wir die Komponenten darstellen,
die die meiste Variation beitragen.

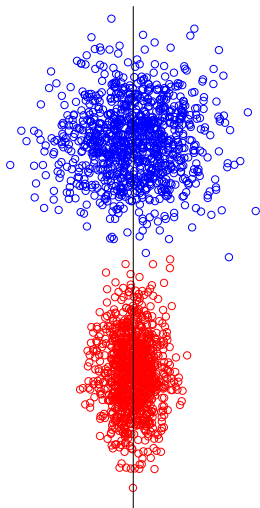
Um einen guten Blick auf die Daten zu haben
wollen wir die Komponenten darstellen,
die die meiste Variation beitragen.

Die Achse mit der größten Variation
wird in die x-Achse rotiert,

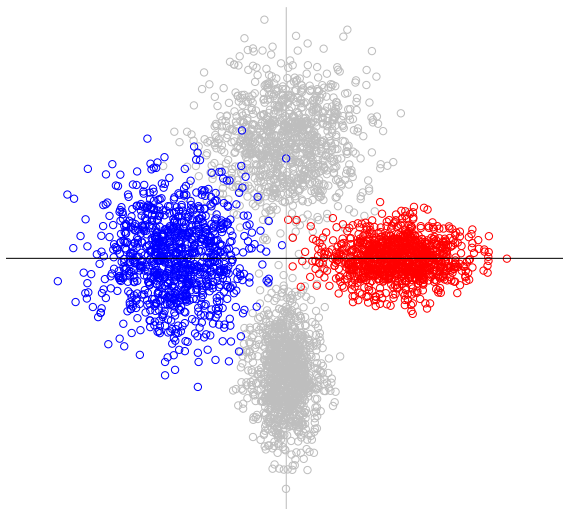
Um einen guten Blick auf die Daten zu haben
wollen wir die Komponenten darstellen,
die die meiste Variation beitragen.

Die Achse mit der größten Variation
wird in die x-Achse rotiert,
die Achse mit der zweit größten Variation
wird in die y-Achse rotiert.

Beispiel: 2-dimensionale Daten



Beispiel: 2-dimensionale Daten



Die **Hauptkomponentenanalyse**
(engl. **principal component analysis**)
findet die Achse mit dem größten Beitrag
zur gesamten Variation.

Die **Hauptkomponentenanalyse**
(engl. **principal component analysis**)
findet die Achse mit dem größten Beitrag
zur gesamten Variation.

Alles weitere hierzu in der Vorlesung
„**Multivariate Statistics in Ecology and Quantitative Genetics**“
(Master Studium)